

iSALE勉強会(2014年2月5日)

衝突流体計算の計算手順

玄田英典 (東工大・ELSI)

完全流体の数値計算方法

オイラー的解法・ラグランジュ的解法
iSALEではどう解いているのか？

弾性体、弾塑性流体

iSALEではどういう
方程式系を解いているのか？

iSALEの歴史

1980年 SALE code Amsden et al.

ニュートン流体（圧縮性粘性流体）衝撃波も扱える
1種類の物質（ideal or stiffened gas）
オイラーモード と ラグランジュモード

1992年 SALE code Melosh et al.

弾性・塑性モデル、破壊モデルの導入
Tillotson状態方程式の導入（一度に複数種類の物質を扱える）
ラグランジュモードのみ

1997年 SALEB code Ivanov et al.

オイラーモード実装（自由表面・物質境界の扱い）
ANEOSの導入
弾性・塑性モデル、破壊モデルの改良

その後 iSALE code Collins, Wunnemann, Ivanov

コードの並列化、空隙モデル、破壊モデルの改良などなど

iSALEの物質強度モデル

iSALE manual p34

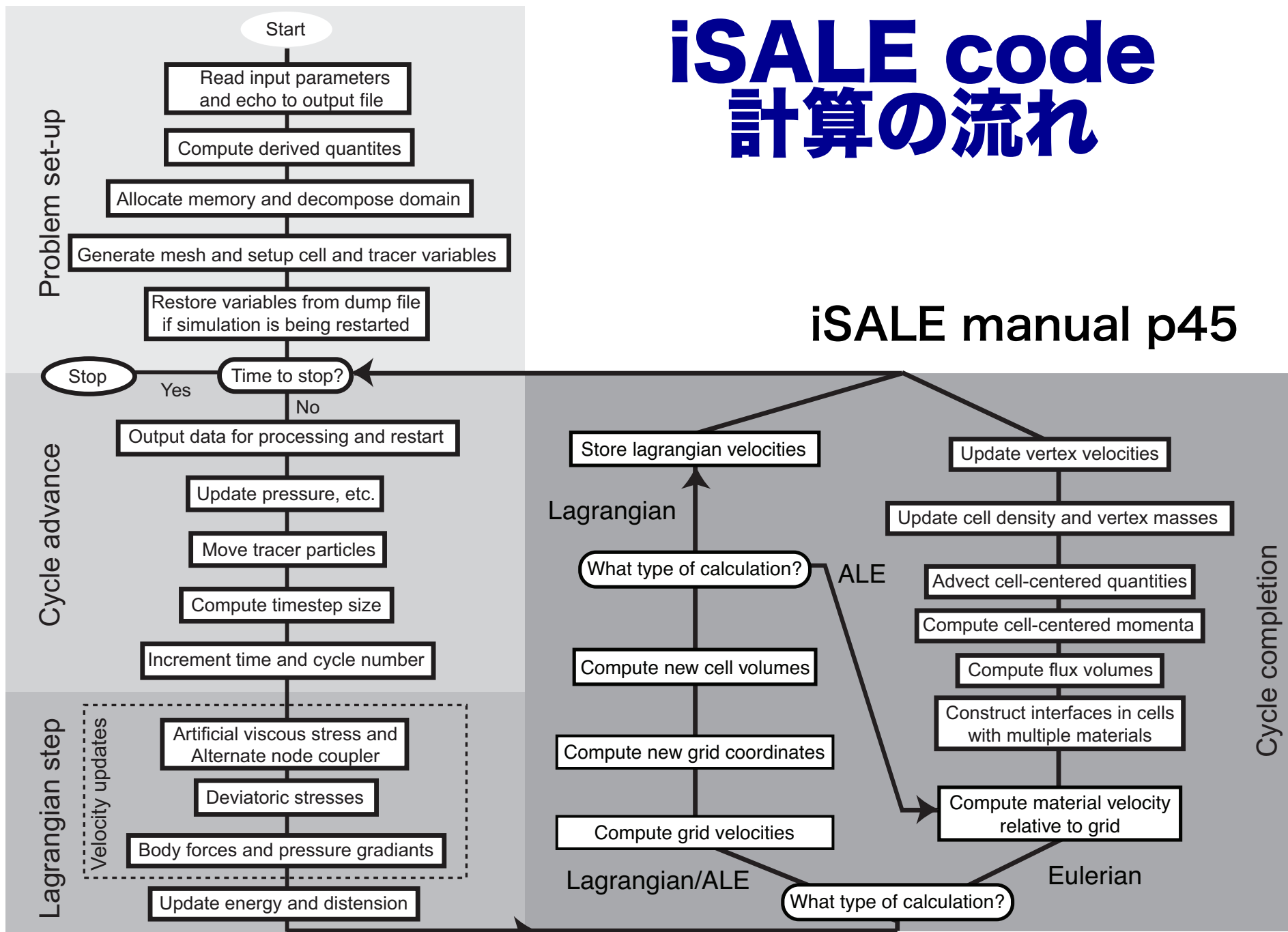
弾性・
塑性体

破壊モデル (ダメージパラメータ)

- ROCK Pressure- and damage-dependent strength model for rock-like materials.
- DRPR Drucker-Prager Linear pressure-dependent strength model for granular material.
- LUNDI Ludborg intact: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.
- LUNDD Ludborg damaged: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.
- VNMS Von Mises: Constant yield-strength model for ductile materials.
- JNCK Johnson and Cook: Strain and strain-rate dependent strength model for metals.
- LIQU Liquid: Newtonian fluid model 粘性流体
- HYDRO Hydrodynamic: Inviscid fluid model 完全流体

iSALE code 計算の流れ

iSALE manual p45



基礎方程式 (完全流体)

1次元の場合

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ eu + pu \end{pmatrix}$$

連続の式
(質量保存則)

運動方程式
(運動量保存則)

エネルギー方程式
(エネルギー保存則)

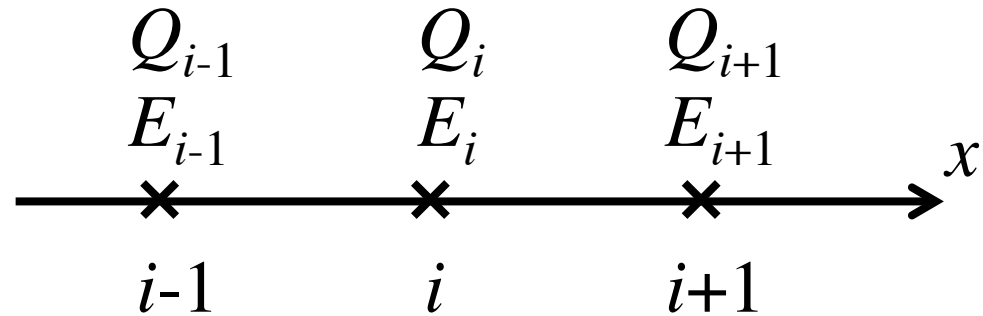
未知変数4つ (u, ρ, p, e) 方程式4つ必要

$$P = f(\rho, e)$$

状態方程式

数値解法 (オイラー的解法)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$



時間微分に対して前進差分

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t}$$

空間微分に対して中央差分

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{E_{i+1}^n - E_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \left(\frac{E_{i+1}^n - E_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \Delta t$$

FTCS Scheme
(Forward in Time and
Central difference in Space)

数値解法

基本方程式 (別の形式)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}$$

連続の式
(質量保存則)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

運動方程式
(運動量保存則)

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{P}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}$$

エネルギー方程式
(エネルギー保存則)

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

ラグランジュ微分

数値解法

基本方程式（ラグランジュ形式）

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad \begin{array}{l} \text{連続の式} \\ \text{(質量保存則)} \end{array}$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \begin{array}{l} \text{運動方程式} \\ \text{(運動量保存則)} \end{array}$$

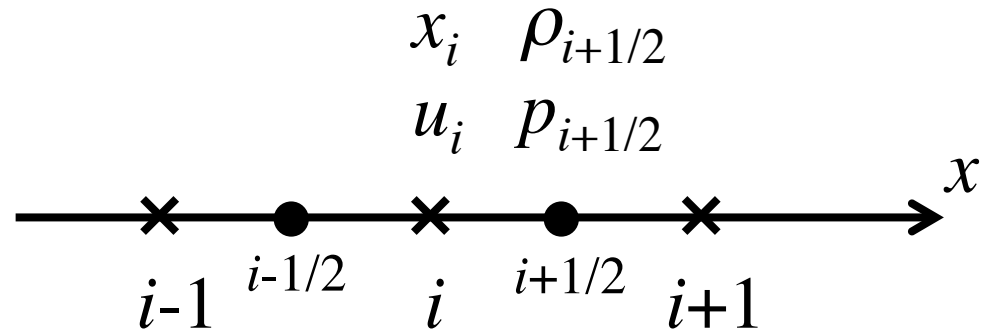
$$\frac{De}{Dt} = -\frac{P}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \begin{array}{l} \text{エネルギー方程式} \\ \text{(エネルギー保存則)} \end{array}$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ラグランジュ微分}$$

数値解法 (ラグランジュ的解法)

エネルギー方程式
(運動量保存則)

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_i^n} \left(\frac{p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n}{\Delta x} \right)$$

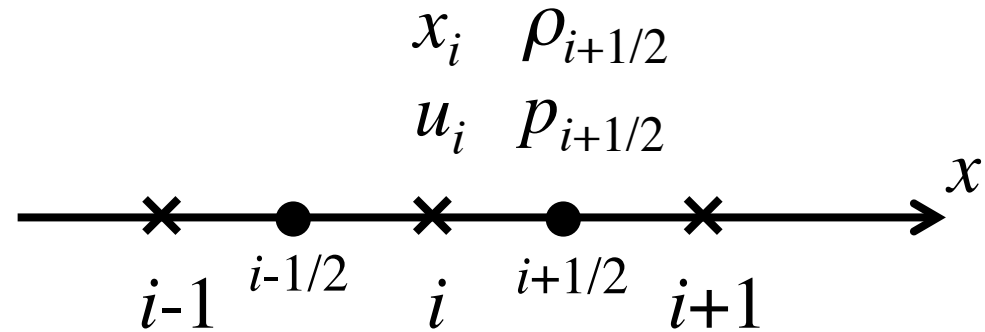
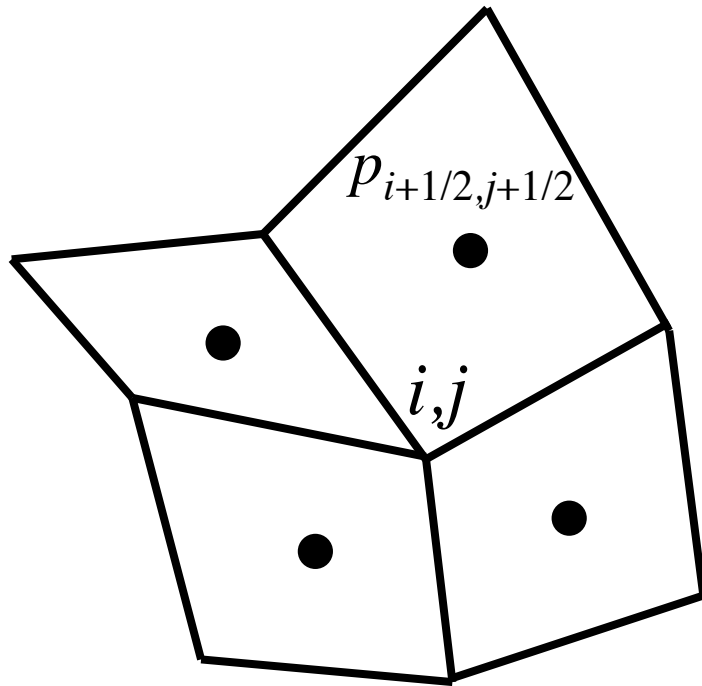
格子点の移動

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_i^n \Delta t$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{2}{\rho_{i-1/2}^n + \rho_{i+1/2}^n} \left(\frac{p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n}{\Delta x} \right) \Delta t$$

数値解法 (iSALE-2D)

ラグランジュモード



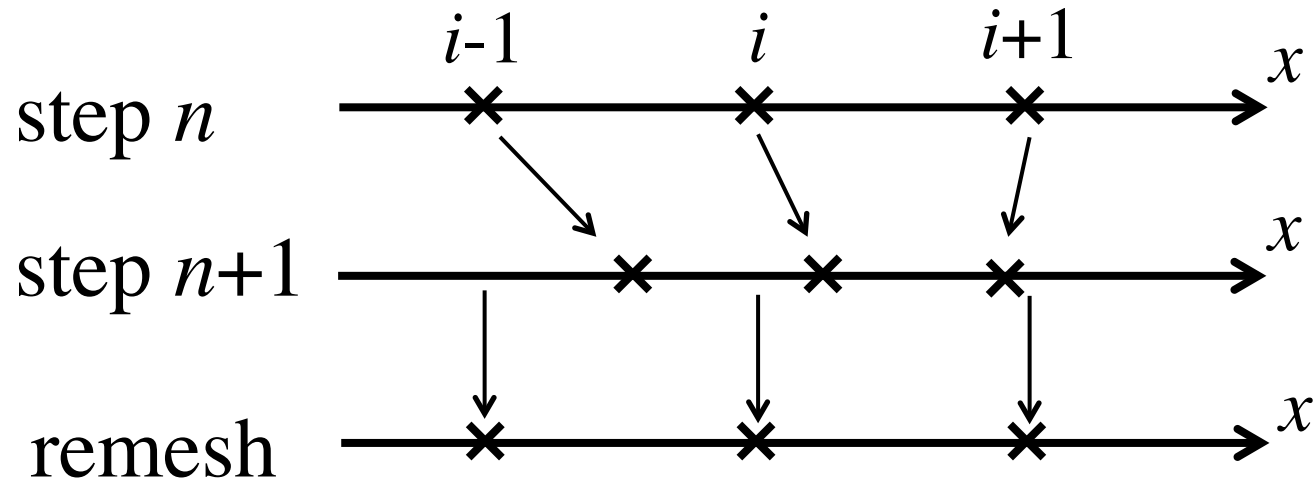
格子点の移動

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_{i,j}^n \Delta t$$

$$y_j^{n+1} = y_j^n + v_{i,j}^n \Delta t$$

数値解法

オイラー的解法 (セミ・ラグランジュ)



iSALEのオイラーモードは
実はセミ・ラグランジュ的な解法

cf. 入力パラメータファイル(asteroid.inp)のALE_MODEを選択する

人工粘性

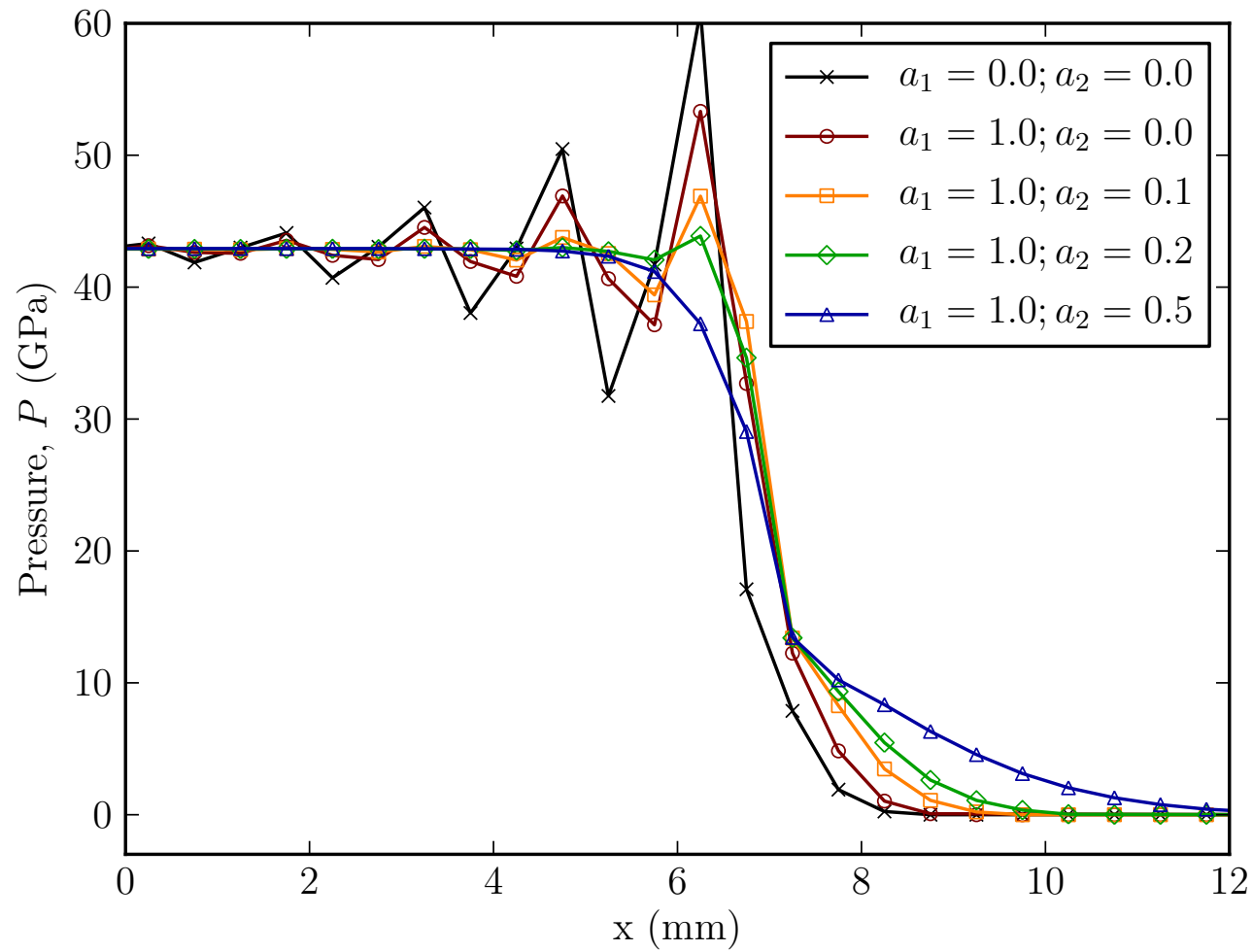
衝撃波（超音速の波）を捕捉するのに必要

運動方程式
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p + q)}{\partial x}$$

von Neumann-Richtmyer型的人工粘性

$$q = \begin{cases} -a\rho C_s \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + b\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x^2 & \text{if } \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \text{if } \frac{\partial u}{\partial x} \geq 0 \end{cases}$$

人工粘性



From Davison (PhD thesis)

iSALEの物質強度モデル

iSALE manual p34

弾性・
塑性体

破壊モデル (ダメージパラメータ)

- ROCK Pressure- and damage-dependent strength model for rock-like materials.
- DRPR Drucker-Prager Linear pressure-dependent strength model for granular material.
- LUNDI Ludborg intact: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.
- LUNDD Ludborg damaged: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.
- VNMS Von Mises: Constant yield-strength model for ductile materials.
- JNCK Johnson and Cook: Strain and strain-rate dependent strength model for metals.
- LIQU Liquid: Newtonian fluid model 粘性流体
- HYDRO Hydrodynamic: Inviscid fluid model 完全流体

弾性体モデル

運動方程式 (弾性体)

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

応力テンソル

運動方程式 (完全流体)

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

構成方程式

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$$

↑
体積弾性率

↑
せん断弾性率

ε_{ij} : ひずみ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + s_{ij}$$

圧力は状態方程式から計算

iSALEではポアソン比を
入力パラメータとして与える

$$G = 3K \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}$$

弾性体モデル

運動方程式 (弾性体)

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

構成方程式

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}$$

偏差応力テンソル

$$s_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$$

s_{ij} の時間微分を使う

$$\frac{ds_{ij}}{dt} = 2G \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} \right)$$



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^n + \frac{ds_{ij}^n}{dt} \Delta t$$

塑性体モデル

応力不変量(J_2)がある値 (降伏応力 Y の2乗) 以上になったら塑性的に振る舞う

$$J_2 = -(s_{xx}s_{yy} + s_{yy}s_{zz} + s_{zz}s_{xx}) + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 \quad (4.9)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2) + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 \quad (4.10)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} ((s_{xx} - s_{yy})^2 + (s_{yy} - s_{zz})^2 + (s_{zz} - s_{xx})^2) + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 \quad (4.11)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} ((s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2) \quad (4.12)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (4.13)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \quad (4.14)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} ((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2) + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \quad (4.15)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} ((s_{xx} - s_{yy})^2 + (s_{yy} - s_{\theta})^2 + (s_{\theta} - s_{xx})^2) + s_{xy}^2 \quad (4.16)$$

$$\sqrt{J_2} > Y \quad \text{の時、} \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij} \times \frac{Y}{\sqrt{J_2}}$$

iSALEの物質強度モデル

iSALE manual p34

弾性・
塑性体

破壊モデル (ダメージパラメータ)

- ROCK Pressure- and damage-dependent strength model for rock-like materials.
- DRPR Drucker-Prager Linear pressure-dependent strength model for granular material.
- LUNDI Ludborg intact: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.
- LUNDD Ludborg damaged: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.
- VNMS Von Mises: Constant yield-strength model for ductile materials.
- JNCK Johnson and Cook: Strain and strain-rate dependent strength model for metals.
- LIQU Liquid: Newtonian fluid model 粘性流体
- HYDRO Hydrodynamic: Inviscid fluid model 完全流体

降伏応力モデル

iSALE manual p34

ROCK Pressure- and damage-dependent strength model for rock-like materials.

降伏応力(Y)のダメージパラメータ依存性

$$Y = Y_d D + Y_i (1-D)$$

DRPR Drucker-Prager Linear pressure-dependent strength model for granular material.

降伏応力(Y)の圧力依存性(線形)

LUNDI Ludborg intact: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.

降伏応力(Y)の圧力依存性(非線形)

LUNDD Ludborg damaged: Non-linear pressure-dependent strength model for intact rock.

降伏応力(Y)の圧力依存性(非線形)

VNMS Von Mises: Constant yield-strength model for ductile materials.

降伏応力(Y)一定モデル

JNCK Johnson and Cook: Strain and strain-rate dependent strength model for metals.

降伏応力(Y)のひずみ・ひずみ速度依存性

iSALE code 計算の流れ

iSALE manual p45

