フロンティアセミナー2013

「私のやってきた地球物理・惑星物理」

講演者:水谷 仁

2013年9月18日-19日

ノート係: 岡本 尚也, 小玉 貴則

目次

1 惑星内部構造論 事始 2

1.1 現在の地球内部の標準モデル 2

1.2 1960 年代初頭の地球内部構造論 5

2 地球内部構造のモデリング 14

2.1 地球内部構造の求め方 14

3 岩石力学のスケーリング則 22

3.1 Part 1. 界面導電現象 22

3.2 Part 2. 超真空中の岩石強度 31

3.3 Part 3. 岩石破壊過程を極める 35

4 衝突現象のスケーリング則 48

4.1 イントロ 48

4.2 クレーターサイズのスケーリング則 66

5 世界で最初の学会 73

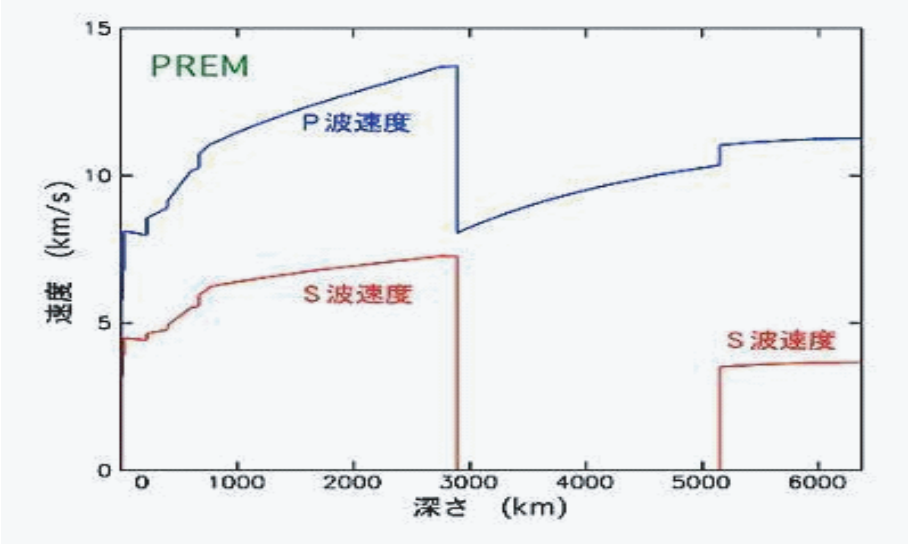
1 惑星内部構造論 事始

私のドクター論文は惑星内部構造の話である。そのころと今では何が変わってきたか、私は何をしたかについて以下の順序で話を進めてお話する。

1. 現在の標準モデルの不満
2. 1960 年代初頭の地球内部構造論
3. 私の D 論紹介
4. 将来の惑星内部構造論

1.1 現在の地球内部の標準モデル

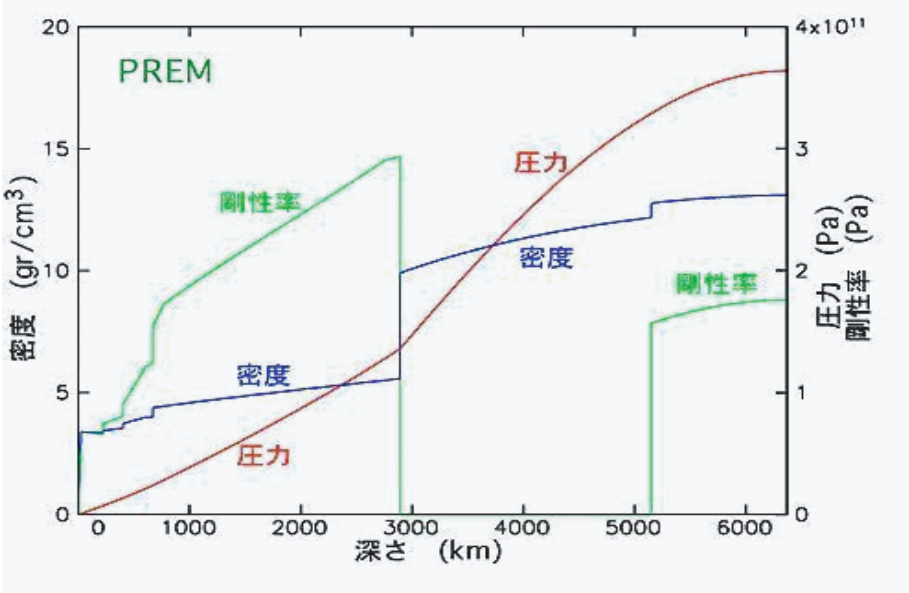
PREM 地震波速度構造―地球の深さと横波速度、縦波速度の関係



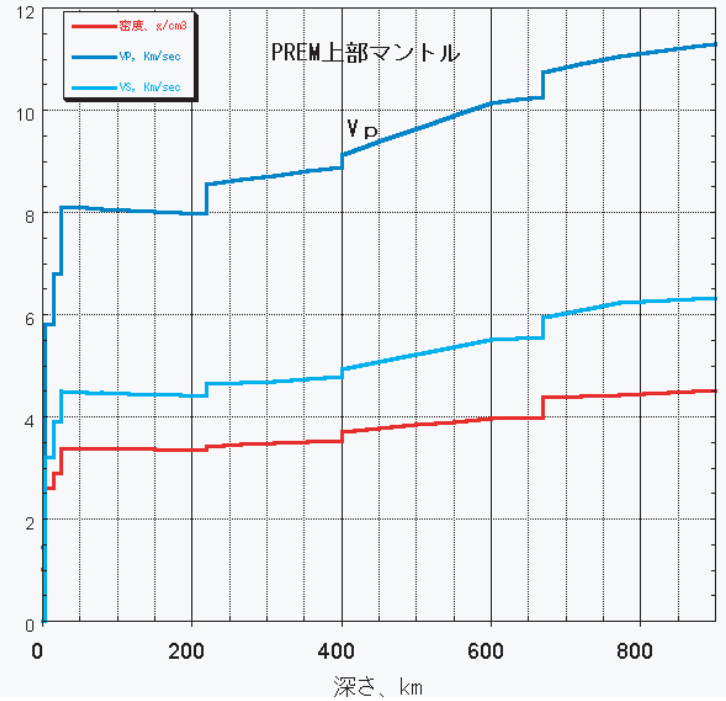
- 1981 年に作られたモデルである。モデル名：PREM
- PREM は preliminary の略であり、preliminary モデルが 30 年も続いている (現在に至るまで) のはおかしい。

PREM の密度構造

- これがいわゆる地球の内部構造。通常、講義で習うモデル。



上部マントルの PREM



- 210km でジャンプ (不連続)、400km でジャンプ、670km でジャンプしている。
- これは地球内部物質が相転移するために起こる。
- 幅 0m でジャンプするのはありそうもない。遷移層が 0m というのはおか

しい。

⇒ これを見て不思議だと思わない人はおかしい。受け入れがたいモデルである。

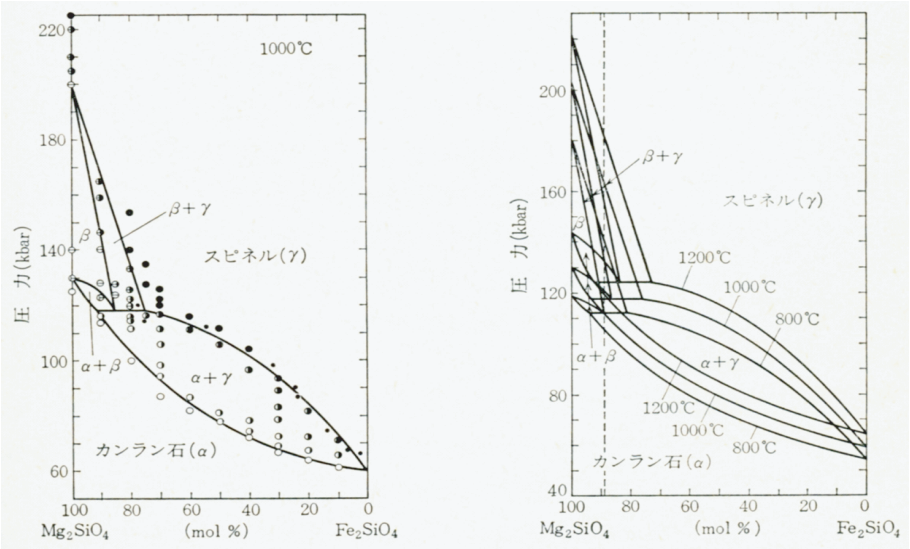
カンラン石

上部マントルを作る主成分、Mg_2SiO_4 と Fe_2SiO_4 の間の固容体をなす

鉱物の相平衡図

左図：温度 1000°C のときのカンラン石の相平衡図

右図：様々な温度でのカンラン石の相平衡図



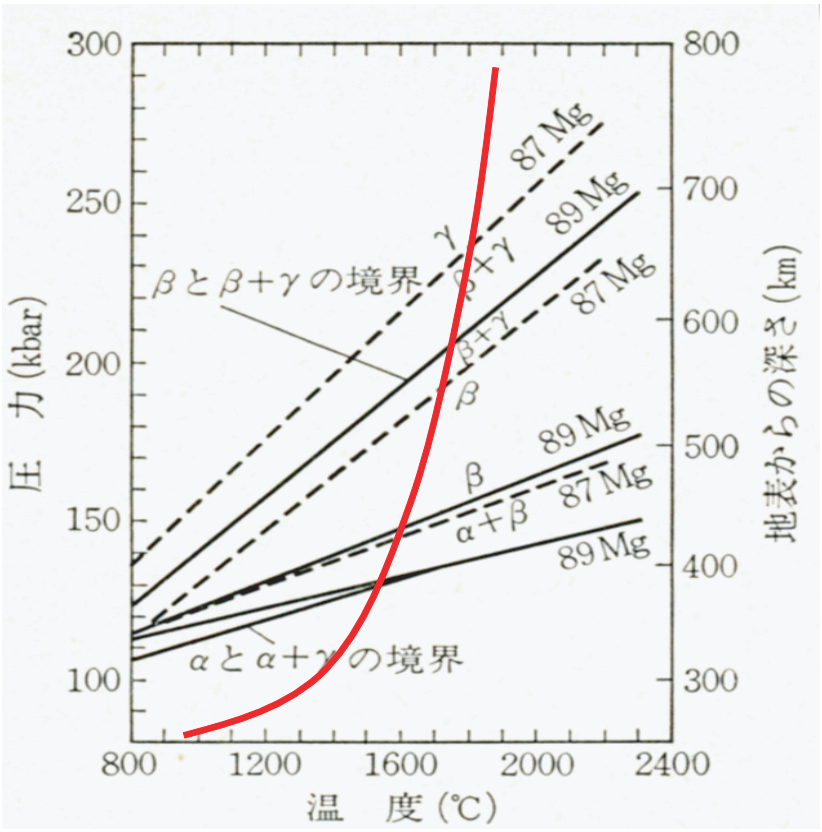
- 地球の組成：Mg_2SiO_4 が 89mol % であると思われている。
- 上部マントルではカンラン石、さらに高圧下ではスピネルという結晶構造 (スピネル型のカンラン石)
- カンラン石とスピネルの間：$\alpha+\beta$ 相や β 相が存在
- 温度上昇に伴い相転移の境界となる圧力は上昇
- それぞれの相には圧力に幅がある。

⇒ ある幅があって速度のジャンプがあるのが普通の物理学者の見解。PREM モデルに見られる不連続はおかしい。

相平衡図 PT ダイアグラム上に描く

赤線は地球内部の仮の温度分布。この温度分布に沿っていくと (Mg_2SiO_4 が 89mol % に注目すると)...

- α 相から β 相に完全に変わるのは地表からの深さがおよそ 450km
- β 相から γ 相に変わるのは地表からの深さがおよそ 600km



- 相転移には幅があることが分かる。特に浅い方 (α 相から β 相) は大きな幅がある。

以上から、PREM モデルはとても不思議。

1.2　1960 年代初頭の地球内部構造論

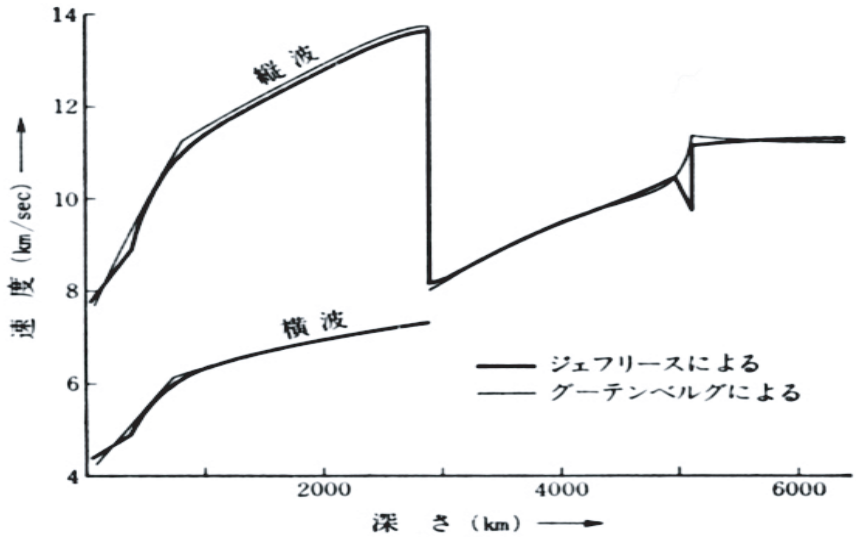
なぜ私は地球物理に入ろうと思ったか

- 私が大学院に入ったのは 1964 年
- 大学 4 年間は勉強してこなかった。就職活動がめんどう。ぼんやりしているうちに大学院入試受ける。
- 当時、竹内先生はダイナモ理論やっていた。
- 普通の地球物理学者はダイナモ理論は成功しそうもない難しい理論だと考えていた。成功したい人はこんなことやらない。
- 私はそういうことに興味を持って、とってもおもしろい、と思い竹内研に

入った。

- その頃地球科学の啓蒙書として坪井忠二編「現代の自然観、2. 地球の構成」という本があった。これはおすすめの本である。

ジェフリース・グーテンベルグモデル



- 地震波の走時曲線から求められたモデル。
- 400km から 900km までは深さが深くなるほど速度の増加が他の領域よりも速い。
- このモデルがその頃の教科書にでてくるようなスタンダードのモデル

地震学の復習

$$V_p = \sqrt{\frac{K_s + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$${V_p}^2 - \frac{4}{3}{V_s}^2 = K_s$$

$$K_s = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

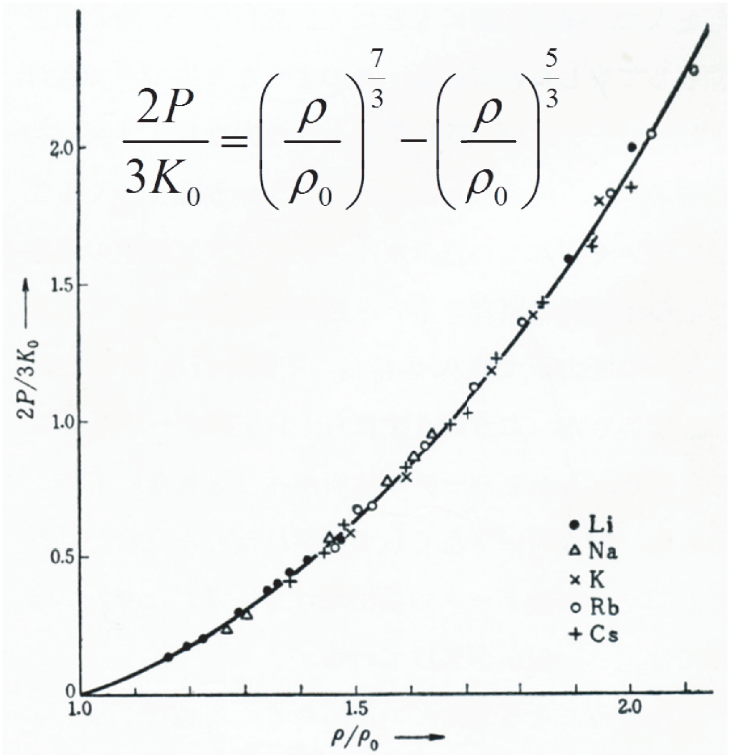
V_p:縦波速度, V_s:横波速度, K_s:体積弾性率 (非圧縮率), μ:剛性率,
P:圧力, ρ:密度, $()_s$:等エントロピー過程

- 縦波速度と横波速度がわかれば体積弾性率がわかる

- これらの式から地球内部の密度変化がわかる
- 地球内部の密度を求める古典的なやり方

Birch-Murnaghan の状態方程式

アルカリ金属をショックウェーブで圧縮したときの圧力と密度の関係



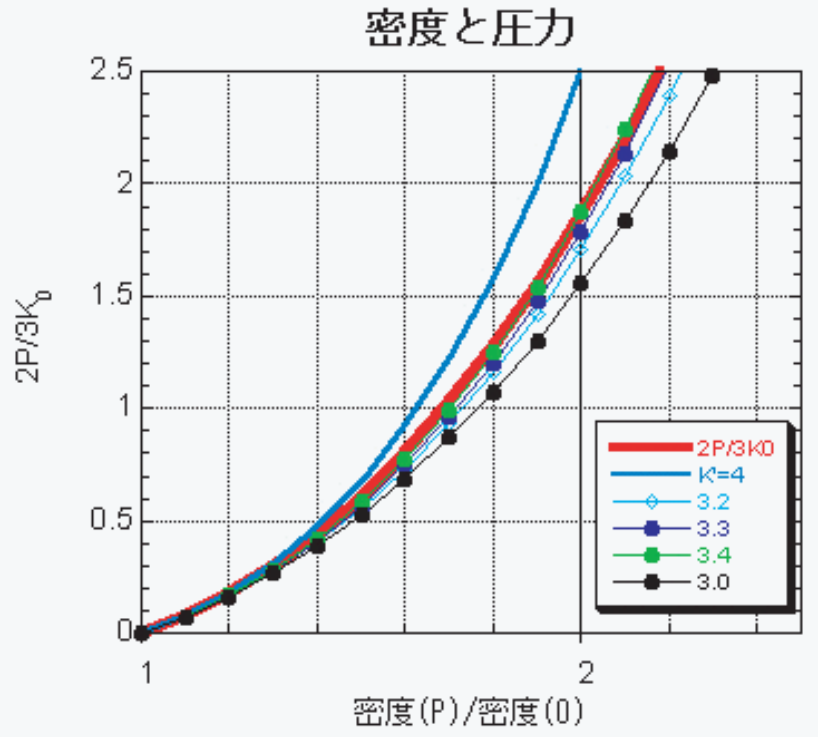
図Ⅰ・9　アルカリ金属の圧縮実験.

- アルカリ金属全部が一本の線に乗る。非常におもしろい結果である。
- しかしよく考えると有限歪みの理論（弾性論）で物の性質が予言できるのかは不思議。どこかがおかしいか、どこかを簡略化しているんじゃないか。

私の考えた状態方程式

赤線:Birch-Murnaghan の状態方程式

- 密度の圧力依存性が非圧縮率、非圧縮率も圧力依存性。この非圧縮率の圧力依存性を $K' = dK/dP$。この K' を定数と仮定する。
- K'=3.4(黄緑色) にすると Birch-Murnaghan の状態方程式とあう。
- 自由エネルギーをテーラー展開して歪みの 2 乗の項までとるのが普通の弾性論。4 乗以降を無視して、3 乗項までとったのが有限歪み理論であり Birch-Murnaghan はこれを使用。
- K' を一定にすると Birch-Murnaghan と等価なことが分かった。アルカリ金属



では $K' = 3.4$

- 色んな岩石や鉱物の K' は 4。地球を作っている鉱物は K' をおよそ 4 にすれば状態方程式がわかる。
- こういう状態方程式を地球内部構造に生かすべき

1965 年ごろのモデル

この頃内部構造論はとても盛んであった。次から次へとたくさんのモデルが作られた。

- 図のキャプションの CIT はカルテクを意味する。番号を変えて少しずつ違うモデルがどんどん作られた。
- Q: 少しずつ違うのは何が違うのか？
- A: 使うデータが違う。
- Q: 地球内部の異方性があることは今の我々からは想像できるけど当時はどうだったのか？
- A: この当時、異方性という考えはまだない。ここでは地球の平均像を一番表すモデルを考えている。
- 地球表面から 200 − 400km に速度の低い低速度層があることがわかってきた。
- 速度のジャンプする場所が二か所ある。400km と 600km

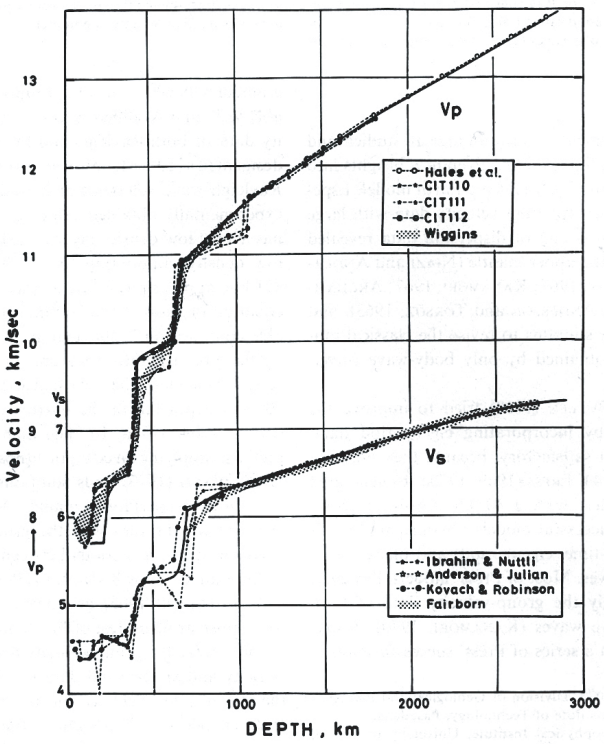


Fig. 1. Starting seismic-wave velocity distribution (solid line) with various body-wave solutions.

自由振動

これまでのデータは P 波、S 波だけであったが、1960 年代以降、自由振動という地球全体の構造を表すデータがたくさんとられ、地球内部の構造を知るのにとても有力なものになった。

このデータと地球内部物質の状態方程式の二つを合わせればとてもよいモデルができると考えた。

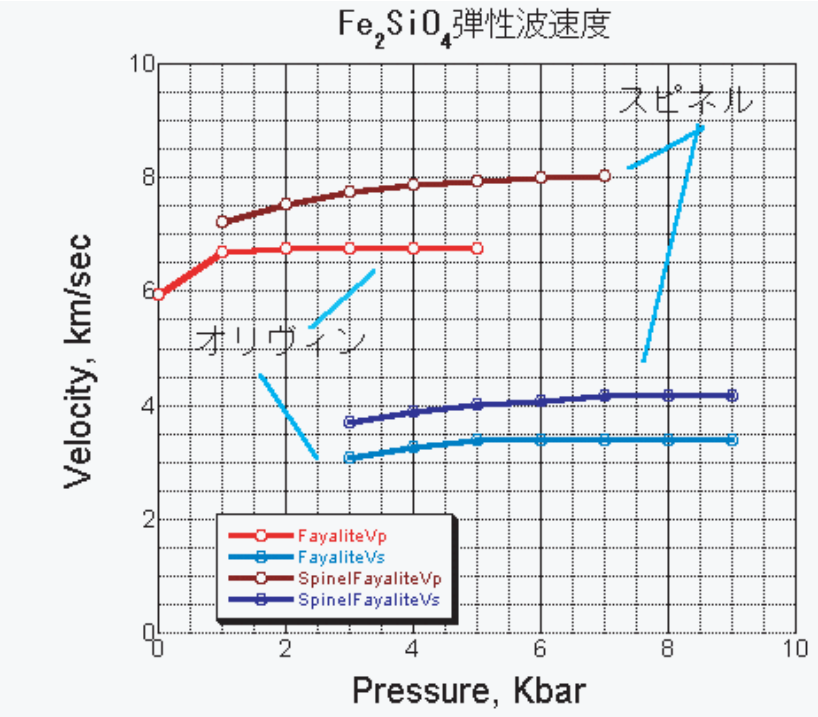
私のドクター論文は内部構造そのものではなくて、弾性波の速度が圧力によってどう変わるか。また物質によってどう変わるかを主に調べていた。

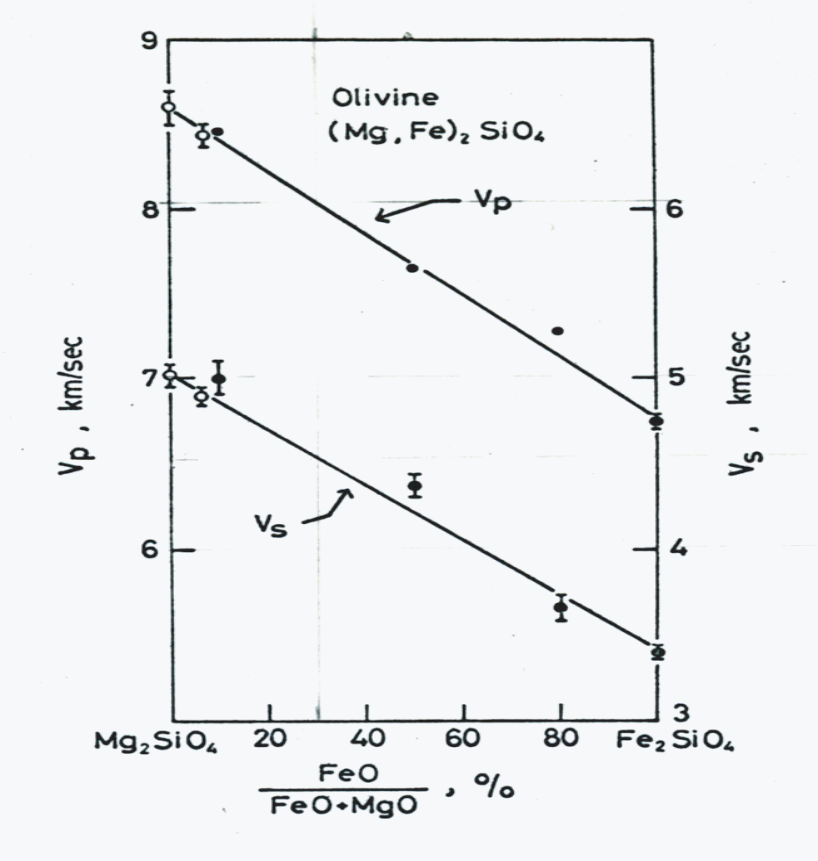
弾性波速度の圧力、物質依存性

- 高圧鉱物を合成、合成したものを高圧下で測定

弾性波速度の組成依存性

- オリビンの P 波と S 波。
- 組成の変化とともに直線上に変化する。


Fe2SiO4弾性波速度
スピネル
オリヴィン
Velocity, km/sec
Pressure, Kbar
FayaliteVp
FayaliteVs
SpinelFayaliteVp
SpinelFayaliteVs
0
2
4
6
8
10


Olivine
(Mg, Fe)2 SiO4
Vp
Vs
Vp , km/sec
Vs , km/sec
Mg2SiO4
Fe2 SiO4
FeO / FeO+MgO , %
9
8
7
6
5
4
3
20
40
60
80

マントルの代表的鉱物の物性表　実験データから、常温常圧でのＰ波速度、Ｓ波速度、剛

Elastic properties of mantle candidate minerals

	Mg_2SiO_4[a] (olivine)	Fe_2SiO_4[b] (olivine)	$MgSiO_3$[c] (orthopyroxene)	$FeSiO_3$[b] (orthopyroxene)	Mg_2SiO_4[d] (spinel)	Fe_2SiO_4[b] (spinel)
ρ_0(g/cm^3)	3.21	4.39	3.20	3.98	3.55	4.85
V_p(km/s)	8.57	6.75	8.36	6.80	10.0	8.05
V_s(km/s)	5.01	3.40	4.99	3.73	5.85	4.21
K_s(Mb)	1.28	1.32	1.17	1.10	1.93	2.00
μ(Mb)	0.808	0.509	0.797	0.554	1.21	0.859
$\alpha(10^{-5}/^\circ)$	2.45	2.45[e]	2.45[e]	2.45[e]	1.62[f]	1.62[g]
K'	5.37	5.37[e]	5.37[e]	5.37[e]	4.18[f]	4.18[g]
μ'	1.80	1.80[e]	1.80[e]	1.80[e]	0.75[f]	0.75[g]
δ_s	4.73	4.73[e]	4.73[e]	4.73[e]	4.00[f]	4.00[g]
δ_T	6.52	6.52[e]	6.52[e]	6.52[e]	5.13[f]	5.13[g]
δ_u	6.54	6.54[e]	6.54[e]	6.54[e]	5.89[f]	5.89[g]

[a]) Data by KUMAZAWA and ANDERSON (1969). [b]) Data by MIZUTANI *et al.* (1970) and MIZUTANI (1971). [c]) Data by KUMAZAWA (1969). [d]) Estimated values (MIZUTANI, 1971). [e]) Assumed equal to the values for Mg_2SiO_4 (olivine). [f]) Data for $MgAl_2O_4$ by SHREIBER (1967) and O. L. ANDERSON *et al.* (1970). [g]) Assumed equal to the values for Mg_2SiO_4 (spinel).

性率、非圧縮率等はだいたいわかった。これを地球内部に利用しようとすると、圧力と温度の依存性を考える必要がある。私は以下のように考えた。

鉱物の状態方程式を規定する無次元数

$$K_S' \equiv (\partial K_S(P,\ T)/\partial P)_T,$$
$$K_T' \equiv (\partial K_T(P,\ T)/\partial P)_T,$$
$$\mu' \equiv (\partial \mu(P,\ T)/\partial P)_T$$
$$\delta_S \equiv -(1/\alpha(P,\ T))(\partial \ln K_S(P,\ T)/\partial T)_P,$$
$$\delta_T \equiv -(1/\alpha(P,\ T))(\partial \ln K_T(P,\ T)/\partial T)_P,$$
$$\delta_\mu \equiv -(1/\alpha(P,\ T))(\partial \ln \mu(P,\ T)/\partial T)_P.$$

α：熱膨張率

それぞれの圧力依存性を K_S', K_T', μ'、温度依存性を, δ_S, δ_T, δ_μ とする。

この 6 つの無次元数が温度や圧力によらないと仮定する。

- K_S', K_T', μ' は圧力に依存しない定数
- δ_S, δ_T, δ_μ は温度、圧力に依存しない定数

こうすることで積分ができ、色々な便利な式が得られる。例えば、

熱力学の公式から熱膨張率は以下の式で表される。

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial}{\partial P}\left\{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right\}_T = \frac{1}{K_T}\left(\frac{\partial \ln K_T}{\partial T}\right)_P$$

したがって、

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\alpha K_T}\left(\frac{\partial \ln K_T}{\partial T}\right)_P = -\frac{\delta_T}{K_T}$$

ゆえに

$$\alpha(P,T_0)=\alpha(0,T_0)\left\{1+\frac{K_{\mathrm{T}}'\cdot P}{K_{\mathrm{T}}(0,T_0)}\right\}^{-\frac{\delta_{\mathrm{T}}}{K_{\mathrm{T}}'}}$$

常温常圧での値がわかると、地球内部の物理量求めることができる。

構成物質の状態方程式 (2)

$$\begin{aligned}
&\alpha(P,\ T)=\alpha(P,\ T_0)\{1+\alpha(P,\ T_0)(\delta_{\mathrm{T}}-1)(T-T_0)\},\\
&\alpha(P,\ T_0)=\alpha(0,\ T_0)\{1+K_{\mathrm{T}}'P/K_{\mathrm{T}}(0,T_0)\}^{-\delta_{\mathrm{T}}/K_{\mathrm{T}}'},\\
&K_{\mathrm{s}}(P,\ T)=\{K_{\mathrm{s}}(0,\ T_0)+K_{\mathrm{s}}'P\}\exp\left\{-\delta_{\mathrm{s}}\int_{T_0}^{T}\alpha(P,\ T)\mathrm{d}T\right\},\\
&\mu(P,\ T)=\{\mu(0,\ T_0)+\mu'P\}\exp\left\{-\delta_{\mu}\int_{T_0}^{T}\alpha(P,\ T)\mathrm{d}T\right\},\\
&\rho(P,\ T)=\rho(0,\ T_0)\left\{\frac{K_{\mathrm{T}}(P,\ T_0)}{K_{\mathrm{T}}(0,\ T_0)}\right\}^{1/K_{\mathrm{T}}'}\exp\left\{-\int_{T_0}^{T}\alpha(P,\ T)\mathrm{d}T\right\}.
\end{aligned}$$

速度・密度と深さ

マントルの鉱物組成を仮定して, 上記の式を使うと地球内部のことが予測できる。

- 異なる実線は異なる組成の (Mg と Fe の比) カンラン石とパイロキシンを混ぜて作ったマントル物質の結果。
- 温度は適当な値を仮定
- 点線は理論の線。実線は理論の線にだいたい近い (2 の実線：Fe が 20%,Mg が 80%) が、あってないところもある。
- 例えば、組成一定の線上 (S 波のグラフの深さ 160 − 350km あたり) に沿わない。これは組成が深さとともに変わっていっていることをあらわしているのかもしれない。

まずは Fe が 20% のものなら 20% のものを使って、これでどこまで説明できるかを明らかにして、それでは説明できない部分をどう変えればよいかをわかればよいかを考えれば地球の中が分かる、と考えそれをやろうとした。

Q and A

Q:速度を求める実験は何をしたのか？

A:片側に電気を与えると振動する振動子をあてて、もう方側に振動が来ると電気にかえる装置を用いた。波の発生と受信をオシロスコープで測り、距離と時間の関係から速度を求めた。

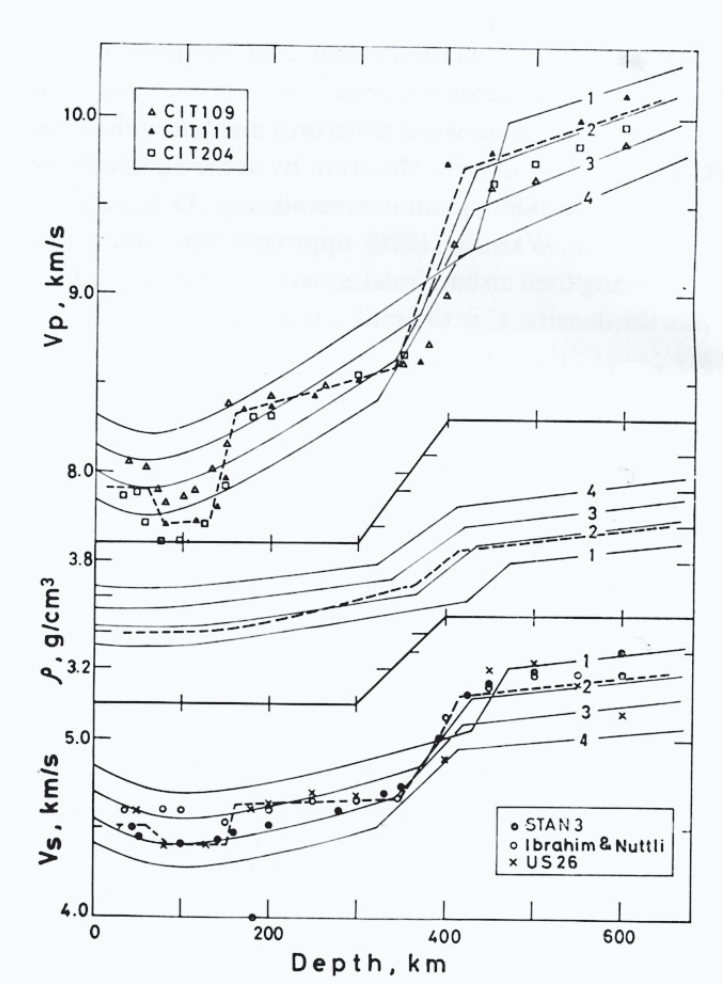


Fig. 2. Compressional velocity, shear velocity and density profiles for a mantle composition $0.7(Mg_{1-\xi}Fe_{\xi})_2SiO_4+0.3(Mg_{1-\xi}Fe_{\xi})SiO_3$. Dotted lines are the starting model. The numbers attached to the curves show 10ξ.

2 地球内部構造のモデリング

2.1 地球内部構造の求め方

惑星内部構造の求め方

- 惑星 n 層にわけ、 各層の密度、 体積弾性率、 剛性率を求める。未知数 3n 個
- 拘束条件：半径、総質量、慣性能率
- 密度だけなら 3 層でできる
- 地球の場合:地震波走時表、表面波速度 (長周期地震計)、自由振動周期、構成物質の状態方程式

- 表面波... 海の下の構造がわかるようになった
- 走時曲線の微分値を用いる。見かけ速度。← 細かい相変換を見る事ができる
- 状態方程式がよくわからんのでまとまらない。→ これらを上手く使おう

モデルに用いられた観測データ

自由振動, 群速度 (phase velovities の微分的なもの)

TABLE 3

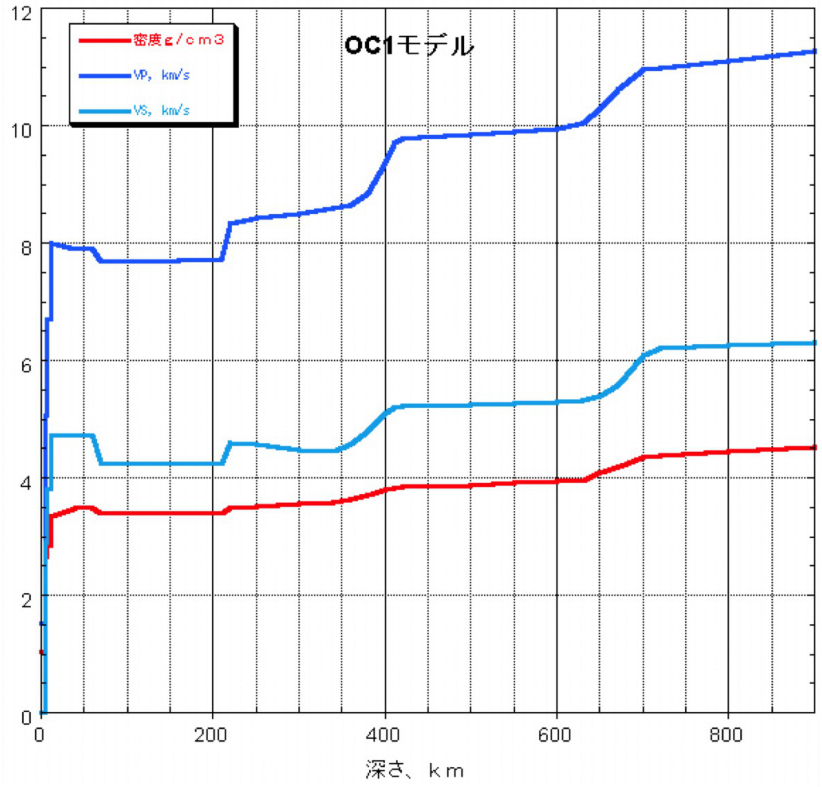
Source of the data used in inversion

Data	References	Remarks
Eigenperiods and phase velocities		
${}_0S_2 - {}_0S_{24}$[a])	DERR (1969)	Worldwide average of eigenperiods
${}_0S_{25} - {}_0S_{100}$	KANAMORI (1970)	Pure-oceanic phase velocities
${}_0T_2 - {}_0T_{24}$[a])	DERR (1969)	Worldwide average of eigenperiods
${}_0T_{25} - {}_0T_{100}$	KANAMORI (1970)	Pure-oceanic phase velocities
Group velocities of Rayleigh and Love waves		
$150 \leq T \leq 325$ s	KANAMORI (1970)	Mostly oceanic group velocities
$95 \leq T \leq 150$ s	ABE (1972)	Mostly oceanic group velocities

[a]) ${}_0S_2$, ${}_0T_{14-17}$ are taken from PRESS's (1966) mean (${}_0S_2 = 3229.0$ s, ${}_0T_{14} = 476.52$ s, ${}_0T_{15} = 451.62$ s, ${}_0T_{16} = 429.66$ s, ${}_0T_{17} = 409.14$ s).

OC1 上部マントルの構造

Prem に比べると jump が滑らか。低速度層もちゃんとある。



Q&A

質問： jump しなくなった理由は?

答え： jump しないように作った。そのほうが実際のデータによく合う。

質問： n 層にわけた、どうやってわけた？

答え： 層の厚さは指定してない。観測にあうように、調整した。層の中で速度一定。100 層くらいある。

ラブ波位相速度との適合性

全体的に、OC-1 はだいたいあっている。

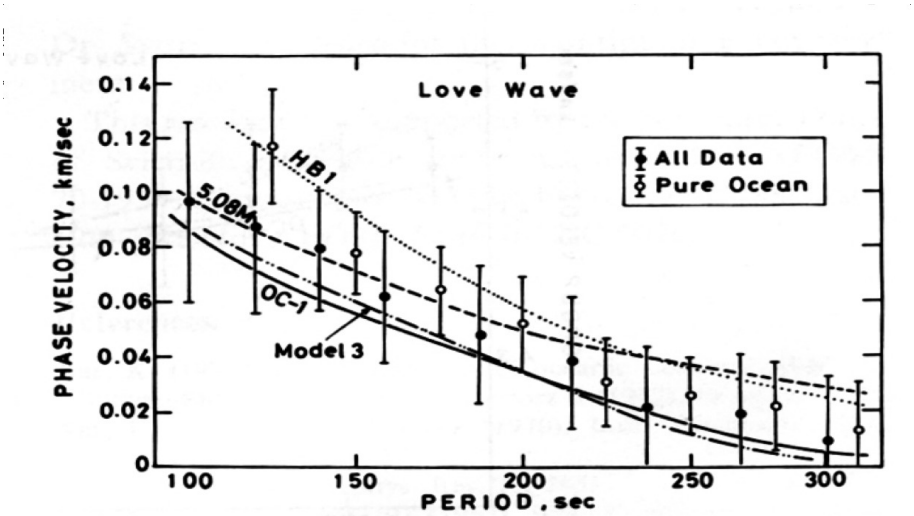
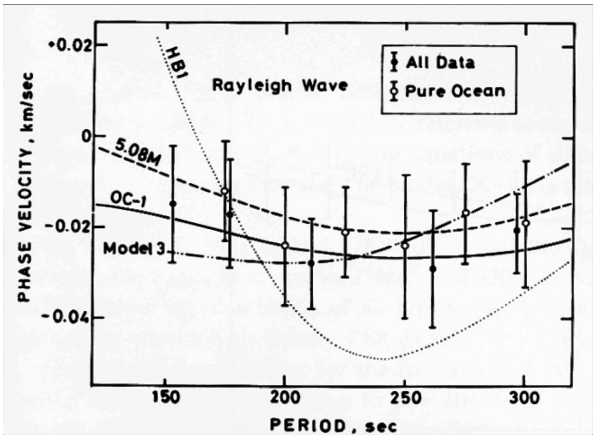


Fig. 7. Love wave phase velocities for a few theoretical models compared with observed values. The difference of the phase velocity from the values for the Gutenberg–Bullen A model is shown.

レイリー波との適合性

左図： 位相速度との適合性

右図： 群速度との適合性



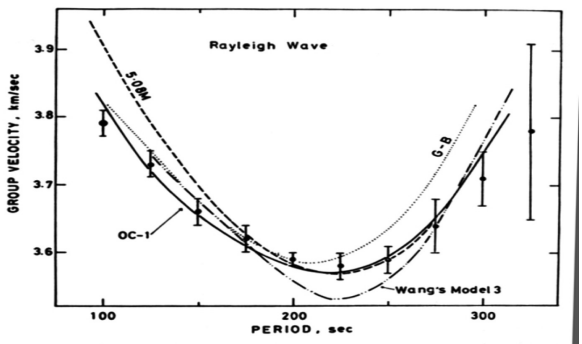
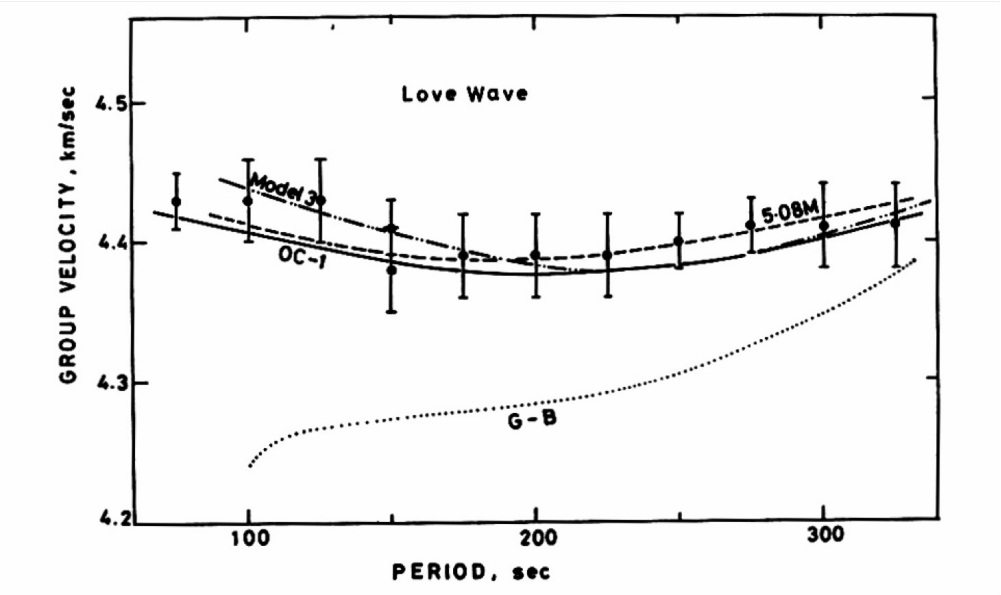


Fig. 8. Rayleigh wave group velocities of the OC-1 model, compared with observed values and a few other theoretical models. Solid circles are the data by KANAMORI (1970) and double circles are the data by ABE (1972).

- 群速度は速度の深さ依存性を表しているの、なかなか合わない。

→ OC-1 はあっている

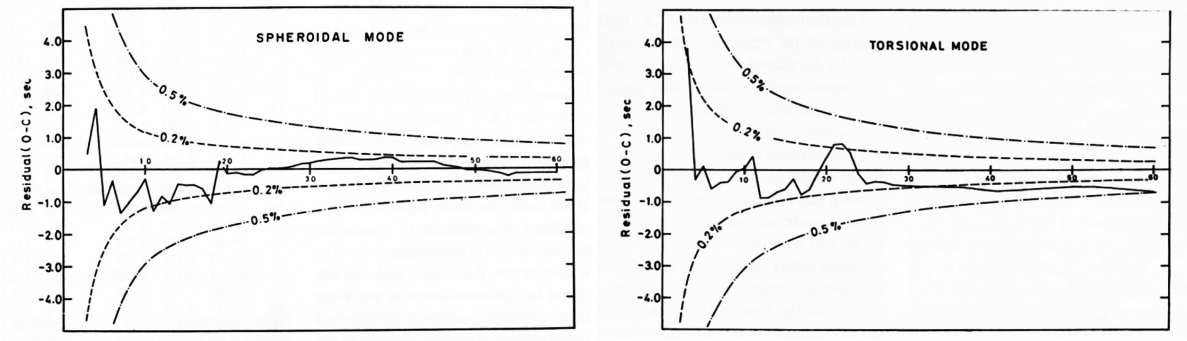
ラブ波群速度との適合性



自由振動との適合性

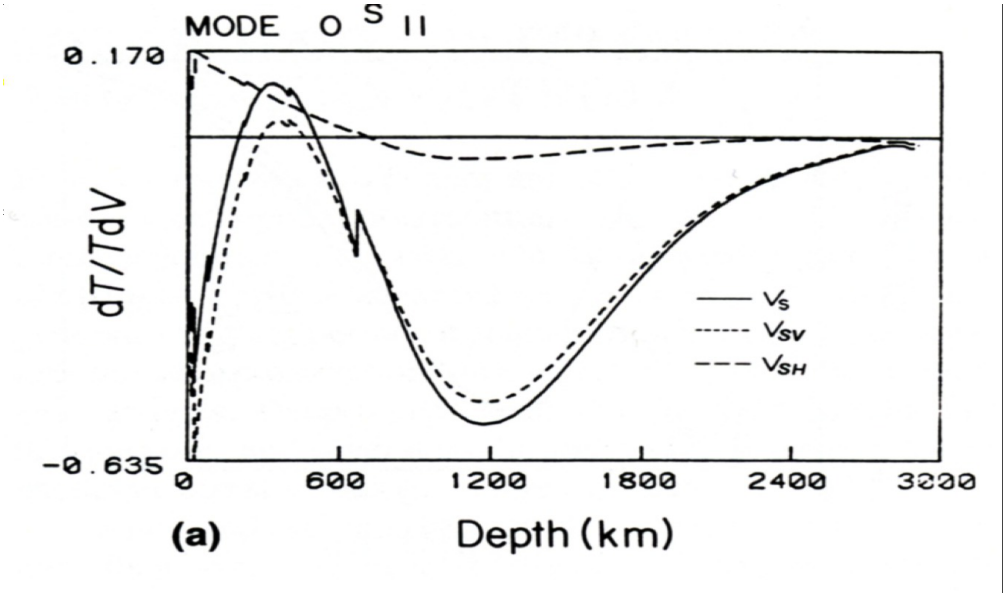
左図： 伸び縮み振動

右図： 捩れ振動



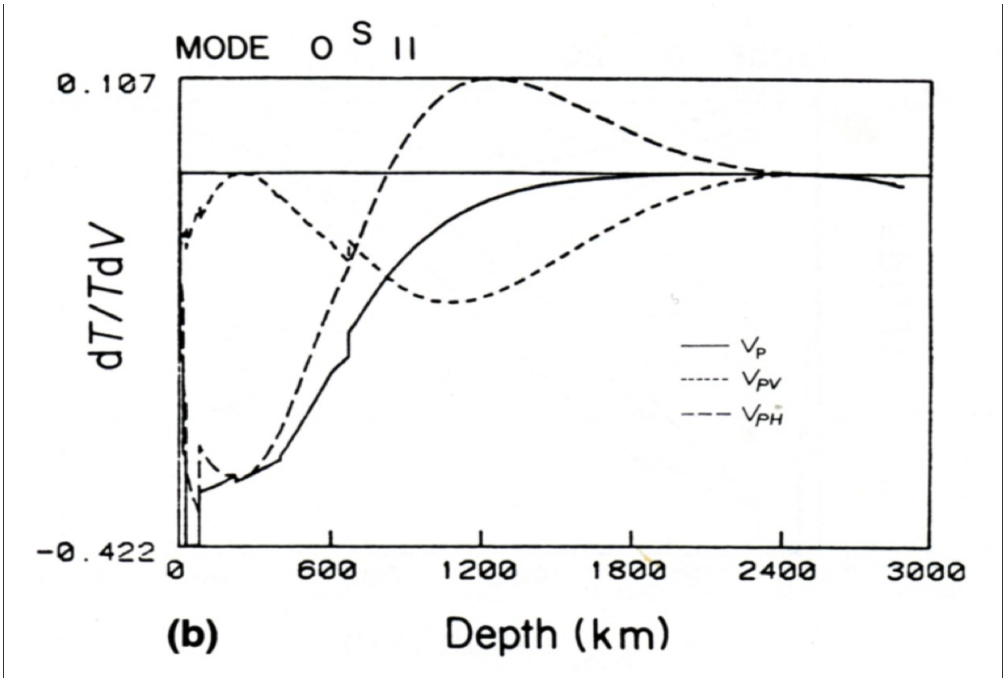
- Prem より OC-1 の方が自由振動の基本モードとよくあっている。
- OC-1 は、浅いところで遅い。

内部構造の求め方

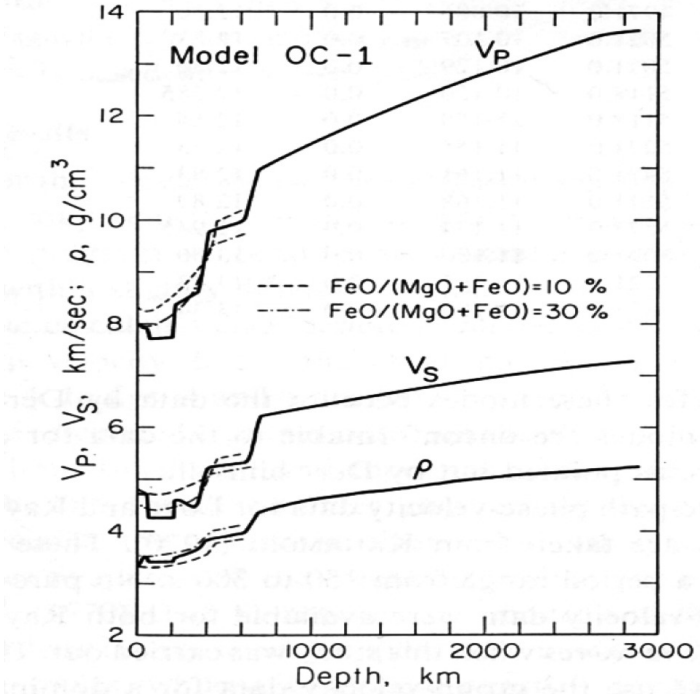


- 偏微分値の表をみて、試行錯誤的に構造を決めた。
- 実測値と比較していった。どこの層の速度を変えるとどうなるかの表が存在。

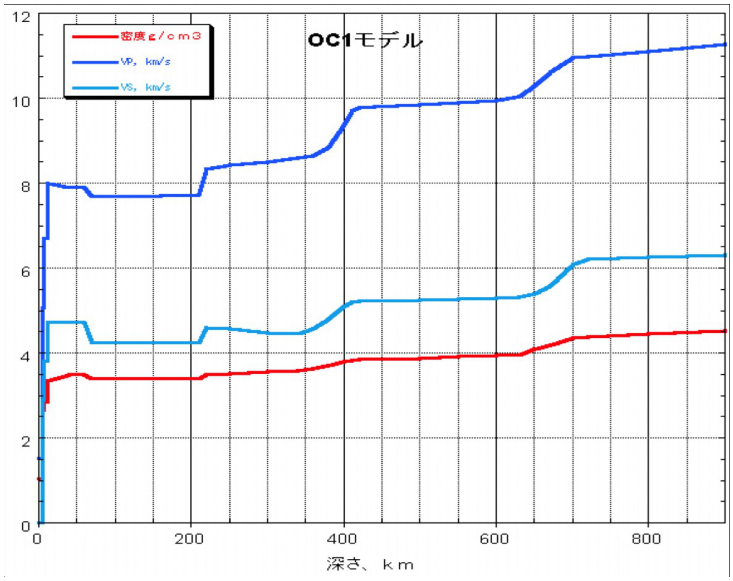
自由振動周期の P 波敏感性



OC-1 モデルの構造

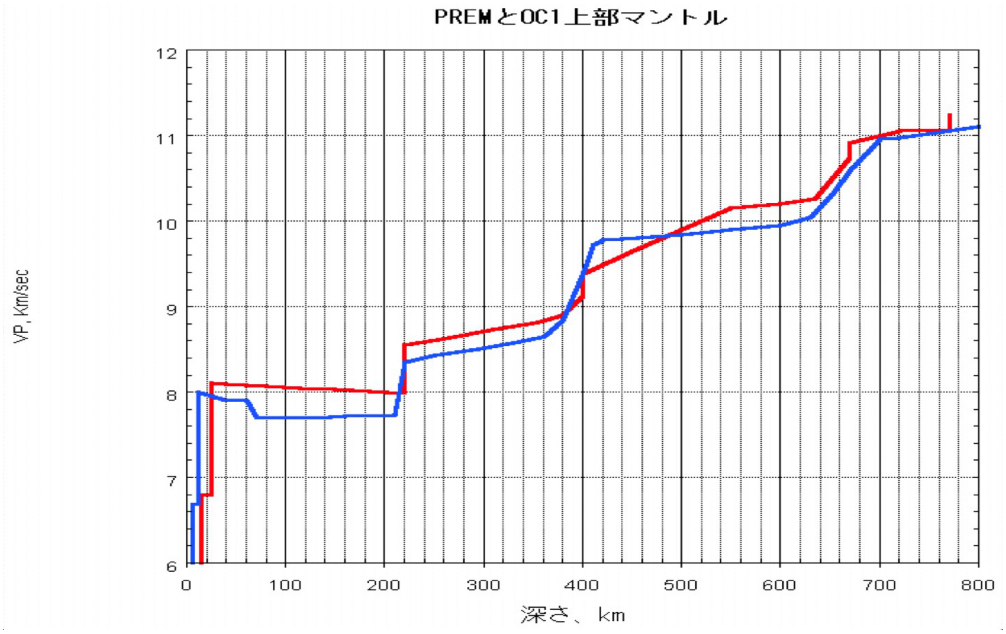


OC-1 上部マントルの構造



Prem との比較

青線：OC-1、赤線：Prem



- 上部マントルは Prem が明らかに高い
- 平均取れば同じくらい。jump が滑らかにつながっている。

OC-1 は現実のデータをよく満足している。

やり方が半分試行錯誤 (偏微分表を見ながら)

誰にでも説明できる方法でやればよかったな。

逆問題　逆問題にできたはず。

(観測値) = (偏微分表) · (モデル速度、密度、m)

線形逆問題の最小二乗法解

- 誤差を評価できるので、なにが不確定に決まっているかが分かる。

Q&A

質問：　Prem は最小二乗 fit。OC-1 の方がいい. Prem は何に決めた？

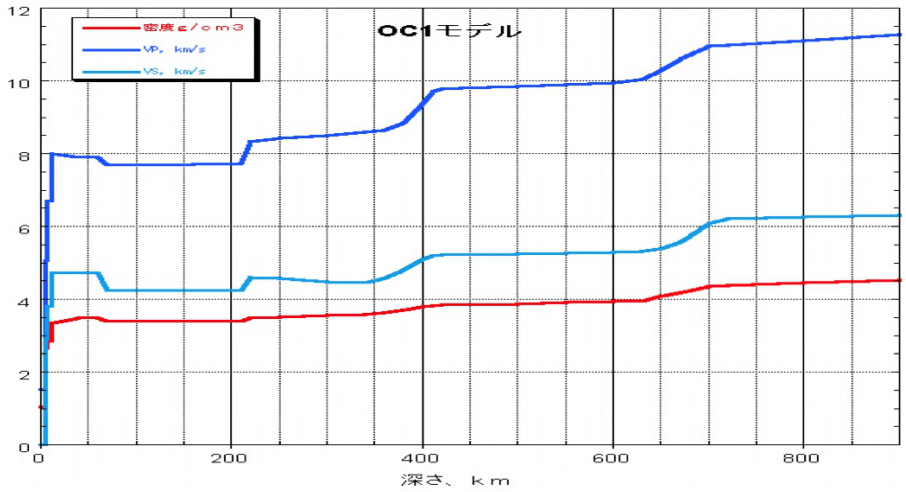
答え：　全てのデータに対して jump するようにすると, Prem が良かった

質問：　jump しない解もあるのでは？

答え：　全てに合わせようとすると、等方性のモデルだと限界がある。パラメータがいっぱいある。群速度が入っていない。

地球内部構造:これからの課題

1. Anisotropy を評価する:上部 200 km には明確な兆候。自由度多すぎ？
   低速度層にマグマシート。もっと簡単化した、isotropy
2. Q(減衰特性) の分布:Q の周波数特性は？
3. Fe / Mg 比分布



Q&A

質問： 不連続での遷移の理由は？

答え： 岩石の構造による。PT における結晶構造の変化を反映。モデルにその幅は入っている。これを自由パラメータにすると、困難。拘束条件の入れどころが技の見せ所。

質問： Fe / Mg 比ってのは, 分解能の問題？

答え： ある一定の領域がないと、難しい。状態方程式の難しさ。

3 岩石力学のスケーリング則

3.1 Part 1. 界面導電現象

イントロ

私が大学院生のころ、松代群発地震、海城地震などがあり、地震予知の可能性が論じられるようになった。

- 松代群発地震：1965-1970, 有感地震が６万回以上
- 海城地震 ：1975, Mw=7.0, 予知がされ、住民が避難後に地震が起きた、何万人も救われた

Scholtz et al. (1973) は dilatancy-fluid diffusion model を提唱し、地震の前駆現象を説明しようとした。

Dilatancy: 押すと圧縮されるから体積が小さくなると思われるがそうではなくて、ポアソン比の関係で横方向に少しのび、体積が元よりもふくらむこと。珍しい現象。

体積が大きくなるということは、中に穴ぼこやクラックができる。そのクラックに流体が流れ込むと岩石の強度が弱くなって地震がおこる。

一方、私は松代で観測されたという発光現象に興味を持った。地震が起こるときに山がオーロラのように光ったという。報道写真におさめられている。そこで、Electrokinetic Phenomena associated with Earthquakes(Geophys. Res.Lett., 1976) を書いた。このことについてお話する。

Q and A

Q: その松代で起きた地震は５年間で６万回ですか？毎日３０回ぐらい地震があったということ？

A: そう。すごい地震だった。

Q: 直前に大きな地震があったのですか？

A: そういうことはなく、だんだんだんだん地震がおこった。その後はこのような例の地震はない。

Q: ６万回毎回光ったのですか？

A: 毎回ではなく、たまに光った。

界面導電現象とは

発光現象は界面導電現象だと考えた。

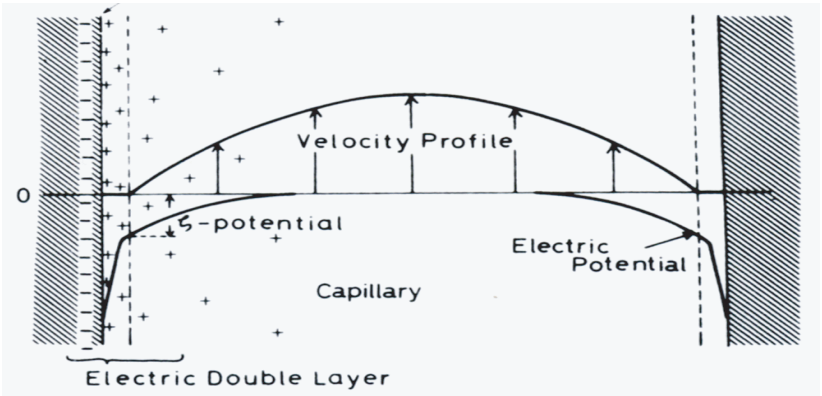


Fig. 1. Schematic diagram of electric double layer and velocity profile in a capillary.

斜線：岩石, 岩石間：クラック、水で満たされている。

界面導電現象：岩石間の隙間 (クラック) が水で埋まっている。固体岩石の表面にはマイナスのイオンが急着し、水の部分はプラスのイオンに富み中性でなくなる。その状況で力 (圧力) をかけると、帯電した水が流れ電流が発生する現象。
また、圧力をかけるのではなく電圧をかけるとプラスイオンがマイナスの方へ移動し電流が流れる。これを電気浸透流 (electro-osmosis) と呼ぶ。電位 E の勾配に比例して電流 j が流れる。

$$j = \frac{\epsilon\zeta}{\eta}\mathrm{grad}E$$

ϵ:誘電率, ζ:ツェータポテンシャル (液体流動が起こり始める「すべり面」の電位、図の点線の位置の電位), η:粘性率, E:電位
ツェータポテンシャルはおよそ 10-100mV

Q: Electric Double Layer (岩石表面からすべり面まで) のスケールはどのくらい？
A: おそらくおよそ 0.01, 0.1 ミクロン。とても小さい。

圧力をかけると液体が流れてプラスのイオンが方側にたまり電位があがる。電位差 E と圧力 P の関係は以下。

$$\mathrm{grad}E = \frac{-\epsilon\zeta}{\eta\sigma}\mathrm{grad}P$$

σ:電気伝導率

このように圧力をかけて発生する電位のことを流動電位 (stream potential) という。

界面導電現象　実験装置

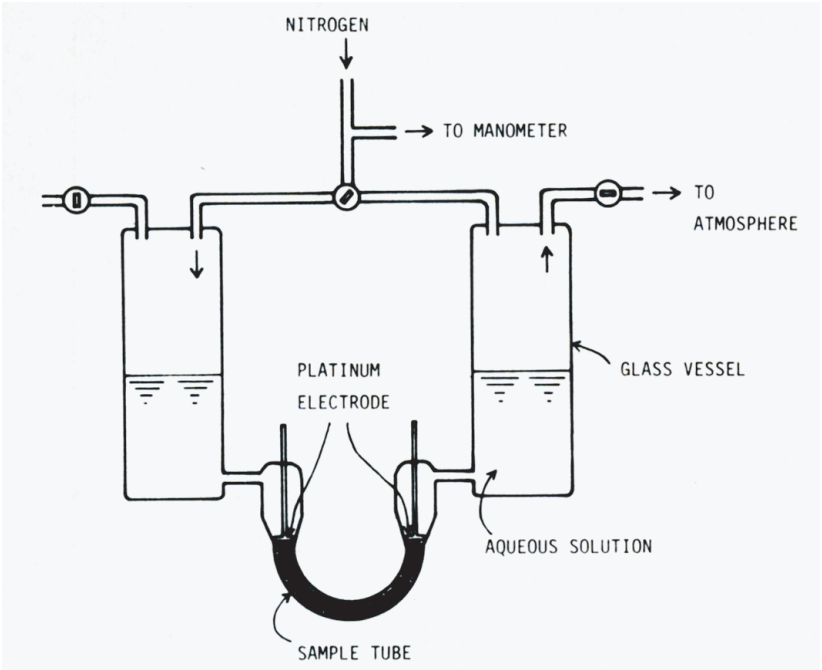


Fig. 3. A schematic diagram of cell assembly used for streaming potential measurements.

- U 字管に砕いた岩石をためて、その上に電極を配置。岩石を砕いたのは水を通しやすくするため。
- タンクに水をためている。窒素ガスを流し込み圧力をあげる。
- 圧力と電位の関係からツェータポテンシャルを求める。

Q and A

Q: 思いついてから実験を始めるまでどれくらいかかったのか？

A: 1 カ月か 2 カ月かな。

Q: 界面導電現象の理論はあったのか？

A: 理論はほとんどあった。後で私が考え直した部分はあった。実際のこのような実験で使った粉のようなものと実際のコンパクトな石との整合性を保つようにどう変えたらよいかを考え作りなおした。

Q: 寺田寅彦の記述にはどのような形であったのか。
A:　江戸時代の地震のとき、磁石にひっついたものが落ちたということがあった。大地震の前には磁場も変わるという話があった。寺田寅彦はそれを思って、地震の前には地球上の電磁場がかわる可能性があるというような話だった。

Q: 中性の水がきて、岩石により中性の水のバランスを崩すということは次々と岩の面がイオンを食べていかないといけない。だから継続的に電流を作るというよりは一回の電流でちょっと電流を流すというイメージですか。
A: 一回電流が流れたら、流れた先でイオンがたまるので、電位ができる。だから電流が流れ続けるというイメージはない。コンデンサーみたいなもの。

Q: この現象は元々地震とは関係ない所でしられていた現象なのか？
A: そう。あとで知ったことですが、これを土木に使った。排水事業。水を地面から抜きたいときに電圧をかけると水が流れてくる。電圧をかけて水を追いだす。そういうように実際に使われたことがある。

Q: 測定できるほど電圧は大きいものなのか？
A: それが測れるから僕もびっくりしたんだ。吸着しているイオンが結構多いということだね。

キャピラリの界面導電現象の一般化

$$-i = L_{11}\mathrm{grad}E + L_{12}\mathrm{grad}P,$$
$$-j = L_{21}\mathrm{grad}E + L_{22}\mathrm{grad}P.$$

ここで、

$$L_{11} = \sigma, (\text{オームの法則})$$
$$L_{12} = L_{21} = \frac{-\epsilon\zeta}{\eta}$$
$$L_{22} = \frac{k^*}{\eta} (\text{ダルシーの法則})$$

i:電流（電流密度）, j: 流体の流れ 1 つ目の式の第一項はオームの法則による。しか

し、電流は両端の圧力にもよる。それが第二項。2 つ目の式の第二項は、圧力をかけて水が流れるダルシーの法則。第一項は界面導電現象。

これはキャピラリ一本の式

岩石の界面導電現象

$$-I = \phi\sigma \mathrm{grad}E - \frac{\phi\epsilon\zeta}{\eta}\mathrm{grad}P,$$
$$-J = -\frac{\phi\epsilon\zeta}{\eta}\mathrm{grad}E + \frac{k}{\eta}\mathrm{grad}P.$$

ここで、ϕ:porosity , k:permeability, σ:電気伝導度

Q: ここで考える pore はつながっていなきゃいけないのか？

A: つながってる。細くてもつながっている。

界面導電現象に関連する数値

発光現象に関する論文をかいたときに、ζ は 10mV から 100mV ぐらいだと予想して発光が起こるかどうかを計算した。

Table 1. Physical constants and model parameters used in the present study.

ζ	$10^{-2} \sim 10^{-1}$	V
k	$10^{-11} \sim 10^{-9}$	m^2/sec
η	10^{-4}	$N \cdot sec/m^2$
ε	$80/(4\pi \times 9 \times 10^9)$	F/m^2
σ	10^{-1}	mho/m
ϕ	10^{-2}	
L	10^4	m
grad P	$10^2 \sim 10^4$	N/m3

地震の前に起こりそうな現象？

圧力勾配はどのくらいあるか？

地震の前は圧力がたまっていて地震が起こると圧力が解放される。

その圧力が解放されるのは震源域の大きさぐらい。

- 地震の前後で、地震のストレスドロップ (圧力差)ΔP は 10-1000bar。1000bar は岩石の強度ぐらいで非常に大きい。
- 震源域の大きさ L は 10-100km。

非常に大きく見積もると、
$\mathrm{grad}P = \Delta P/L = (10 - 1000)\ \mathrm{bar}/(10 - 10)\ \mathrm{km} = 0.1 - 100\mathrm{bar/km}$
これで電流がどのくらい流れるかを以下の式で見積もると

$$-I = -\frac{\phi\epsilon\zeta}{\eta}\mathrm{grad}P.$$
$$I = 0.7 \times (10^{-7} - 10^{-4})\ \mathrm{A/m^2}.$$

オーダーとしてはナノアンペアから 10 マイクロアンペア。測れない量ではないが、相当小さな量である。
Q:porosity はいくらぐらい？
A:porosity は 10% ぐらいにした。

地震前後の発光現象はありえるか

電流が流れた後には電位が高くなる。(流体の流れは止まる)

$$\frac{\mathrm{grad}E}{\mathrm{grad}P} = \frac{\epsilon\zeta}{\eta\sigma} = 10^2 - 10^3\ \mathrm{V/kb}$$
$$I = 0.7 \times (10^{-7} - 10^{-4})\ \mathrm{A/m^2}.$$

電圧を見ると、100-1000V ぐらい。これでは発光しない。
これから発光現象は起こりそうもない。

Q and A

Q: 電流と発光というのはどうつなげるんだったんですか？例えば豆電球だったら、電流があって抵抗があってで発光があるじゃないですか。この場合大気ですか？石そのものですか？
A: 石そのものに放電破壊が起こると考えていた。放電破壊は 10,000V で起こる。真空だったら 1,000V。

Q: クラックに水が流れて電圧を測定するとの話だったですが、地震予知して、人々に知らせる余裕はあるのか？
A: ダイラタンシーディフュージョンモデルというのが正しかったら、それは十分に余裕がある。

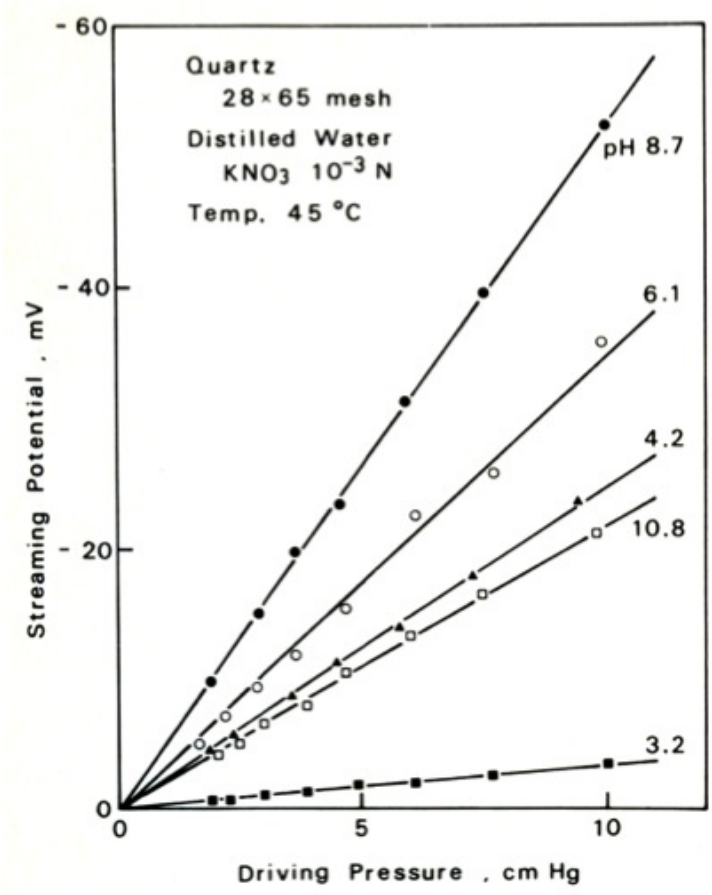
Q: それはクラックの成長の一番最初の成長の様子が見えるということですか？

A: 自然界のように非常にゆっくりクラックが発生すると目に見えるような変化は最後の方。でも巨大地震でも今のようなモデルで地震が起こったならば、一カ月ぐらい前には目に見えてくるはず。だけど実際にはそういうことはないみたいだからそれは今後の話。

ゼータ電位の測定

石英, 蒸留水 (+ 多少の硝酸カリウム)

→ 電圧が直線的に求まる。ph によって変わる



鉱物によるゼータ電位の変化

ゼータポテンシャルは、ph7 くらいだと 80 mV

ゼータ電位が岩石の破壊強度に影響

- 界面活性剤を入れると、ゼータポテンシャルが変化し、強度も変化
- たくさん活性剤 (DTAC) を入れる (10^{-3} mol/L) と、強度が弱くなる。

実験結果のまとめ

- ゼータ電位は、岩石の力学的性質に影響
- ゼータ電位が 0 あたりで、破壊強度の minimum

→ 地下水の成分が、岩石破壊に影響

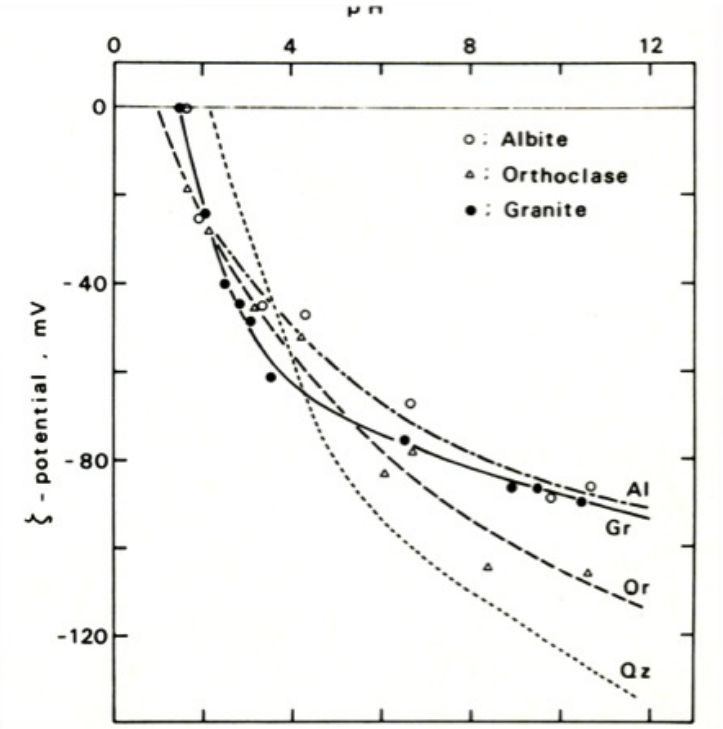


Fig. 6. Variation of the ζ potential of orthoclase, albite, and granite as a function of *p*H in aqueous solutions of 10^{-3} *N* KNO_3. Temperature is set at 45°C. The curve Qz represents the data given in Figure 5 for quartz.

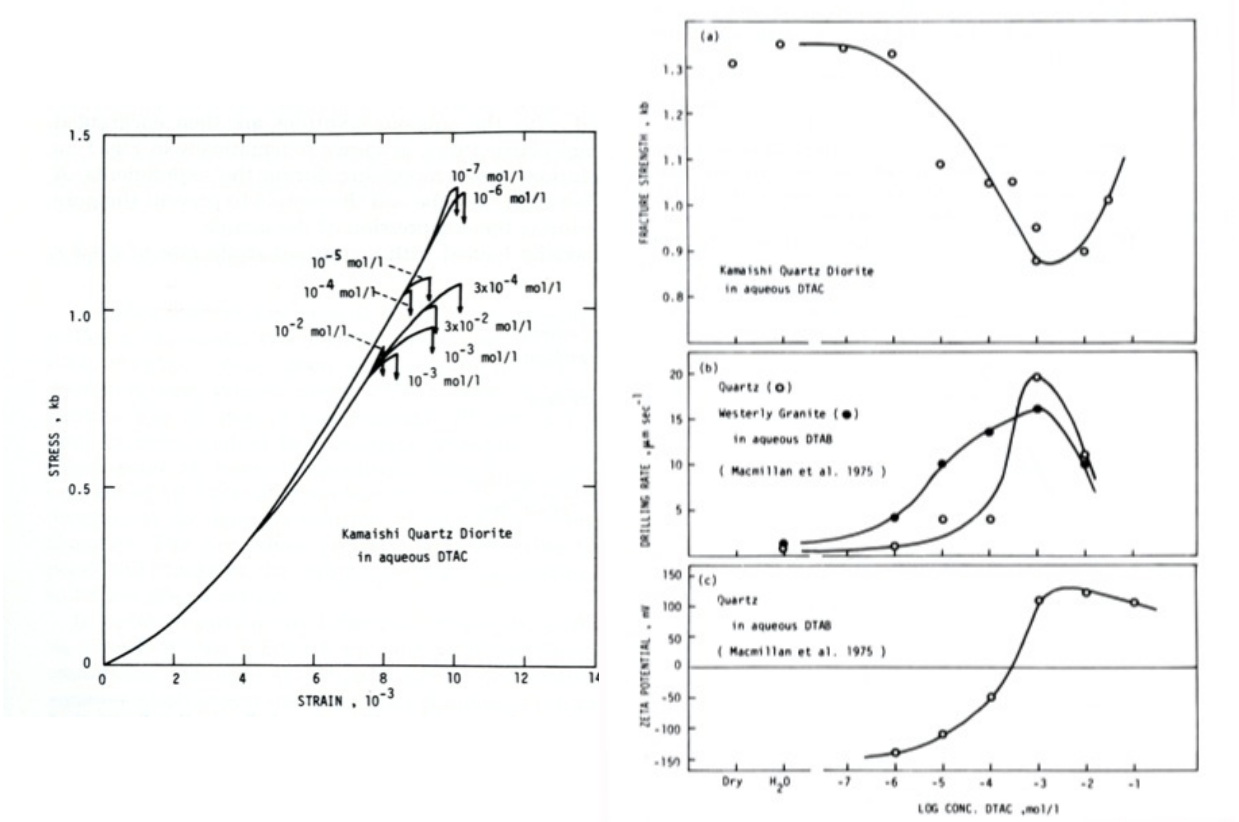
Q&A

質問： なんで極小を持つのか？グラフの形状について。

答え： なぜゼータ電位が 0 で、最小をとるのかはわからない。クラックの延び方が異なる。界面活性剤で、表面の吸着が + から- になるのはよくわからない。親水側か疎水側かの問題。ゼータポテンシャルが 0 のときに、クラックの先端が丸くなる。

質問： 実験は、職人芸か？

答え： 水を十分岩石の中に染み込ませないといけないくらい。岩石を真空にする。クラックを真空にする。それを水に落とす。



3.2 Part 2. 超真空中の岩石強度

1. 月震の振動継続時間が非常に長い。
   M3 くらいが 1 時間くらい継続。月の岩石に振動を加える →
2. 超真空中では月の岩石の Q が異常に高い。Q=5000(Q_{earth} = 10 とか)
   5000 回振動しないと、振幅が 1/2 にならない。
3. 超真空中での岩石の振る舞いを調べた。

超真空下での岩石破壊実験装置

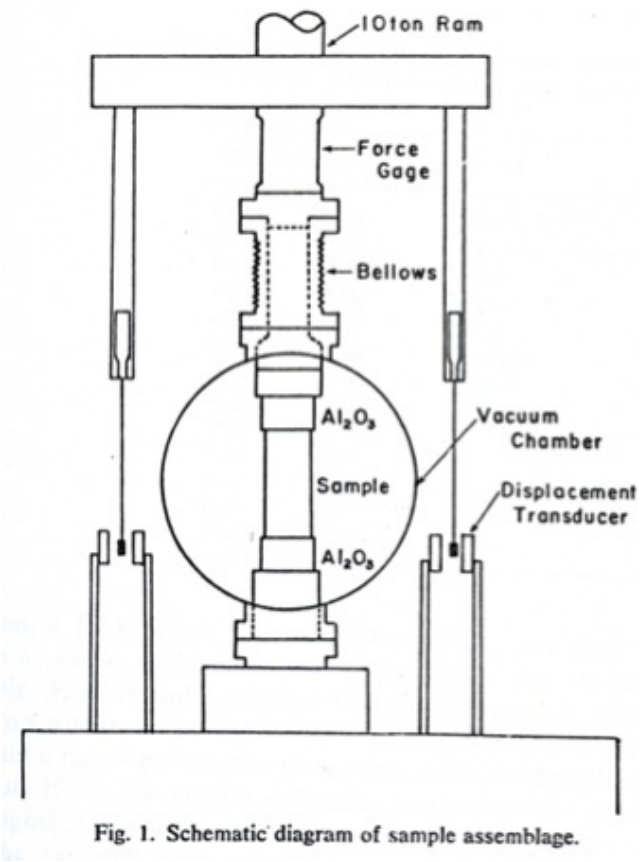


Fig. 1. Schematic diagram of sample assemblage.

玄武岩の実験

- 月なので、玄武岩。極めてよく乾燥したサンプルを真空中で暖めた。
- 2×10^{-8} torr, 90°C, 数日間。超真空中では、岩石は強くなる (倍以上)。

→ 月の上で自信を起こすのは、地球より大きなストレスでないといけない。

Q&A

質問： 他の玄武岩のサンプルだと変わる？

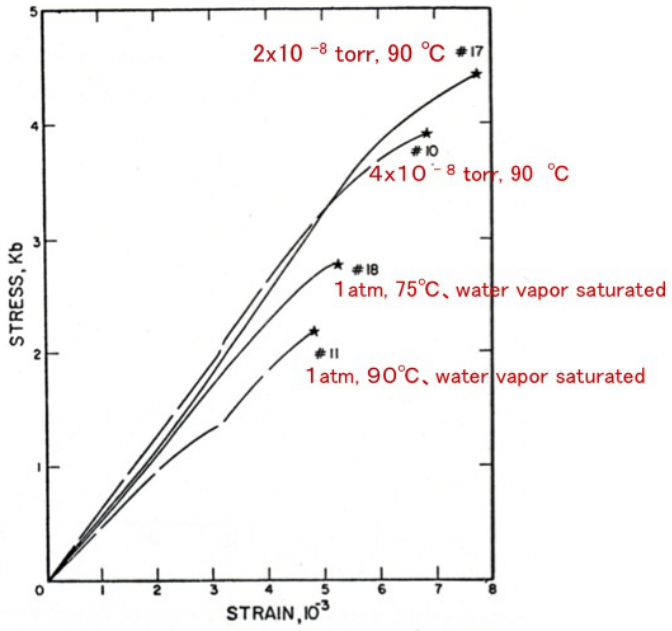
答え： 変わるが、定性的にはこんな感じ。

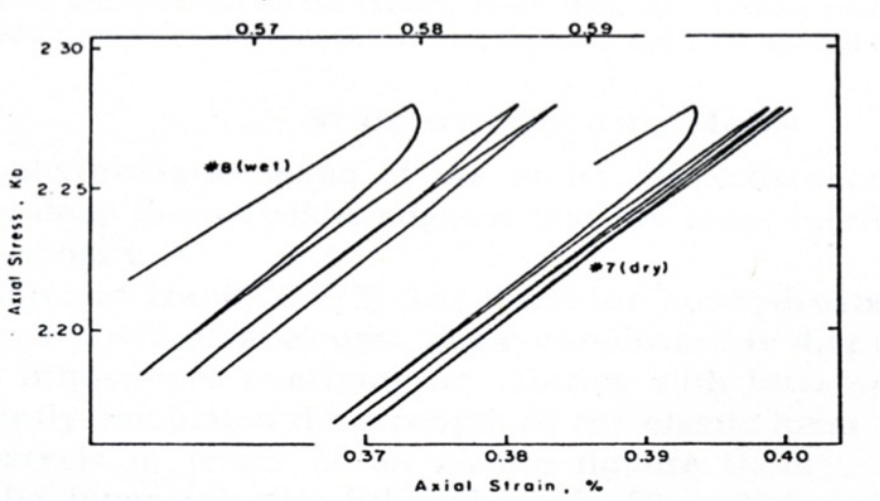
繰り返しの加重サイクル実験

- wet(low Q) は、ヒステリシスが見えるが、dry(high Q) では見えない。
- 月の石では、このような static な実験でも確かめられた。

→ 乾燥した石と湿った石で性質が異なる

Q&A





質問： 1 サイクルどれくらい？

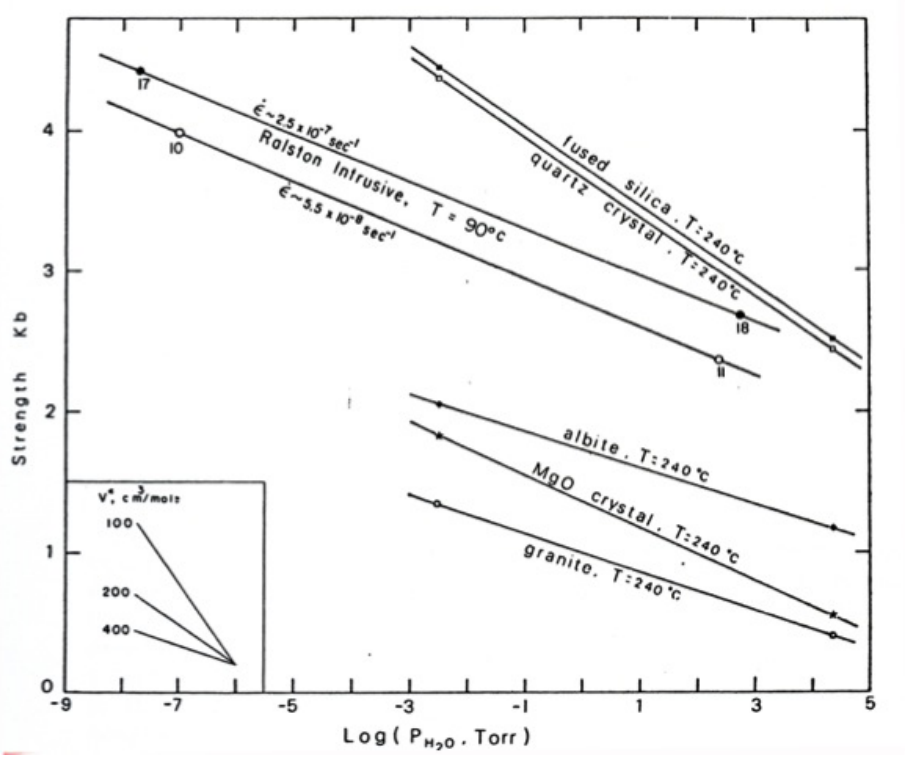
答え： 1 時間くらい

岩石の破壊強度の P_{H_2O} 依存性

- P_{H_2O}12 桁の変化で 1-2 kbar の変化がある。
- 鉱物の種類によらず、同じような傾向がみえる。

Q&A

質問： あるところでサチるのでは？



答え： この先は知らない。間は知らかった。物にはあまりよらないってことが言いたい。

岩石破壊強度の歪み速度依存性

- 押す速度を変える。strain rate
- 12 桁変えて、1 kbar くらいの変化。勾配が似ている (なぜかはわからない)。物によらない

岩石破壊の Mizutani スケーリング則

1. 破壊強度 σ の歪速度依存性

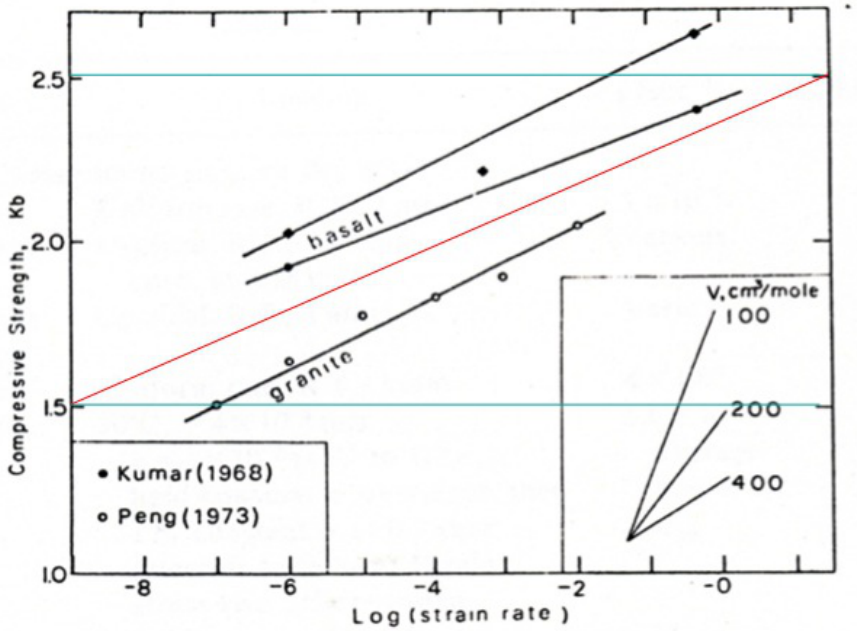
$$\sigma = \sigma_0 + \frac{RT}{fV^*} \ln \dot{\epsilon}$$

2. 破壊強度 σ の水蒸気圧依存性

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{RT}{fV^*} \ln P_{H_2O}^n$$

3. 疲労破壊までの時間 τ の応力依存性

$$\ln \tau = \ln \tau_0 - \frac{fV^*\sigma}{RT}$$



3.3 Part 3. 岩石破壊過程を極める

- 自信を理解するためには重要。
- 自然界と実験室では、歪速度が違う。→ 自然 (ゆっくり) と実験室 (はやい)
- 歪速度の小さな実験をして、どうなるかみる。
- Acousitic emission でクラックを観察

岩石の破壊過程

- 上下から力を加える。ポアソン比よりちょっと大きく広がる。

岩石の応力-歪曲線

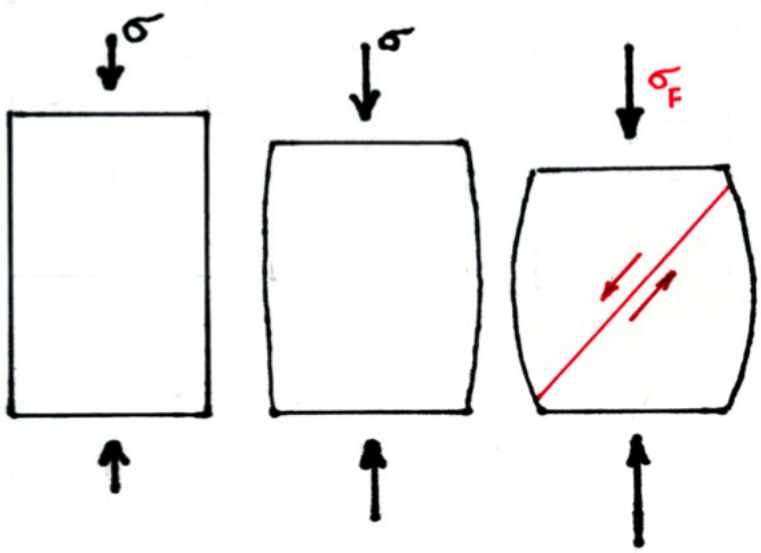
- 破壊に近づくとダイラタンシーがおこる。
- この振る舞いを観測する。

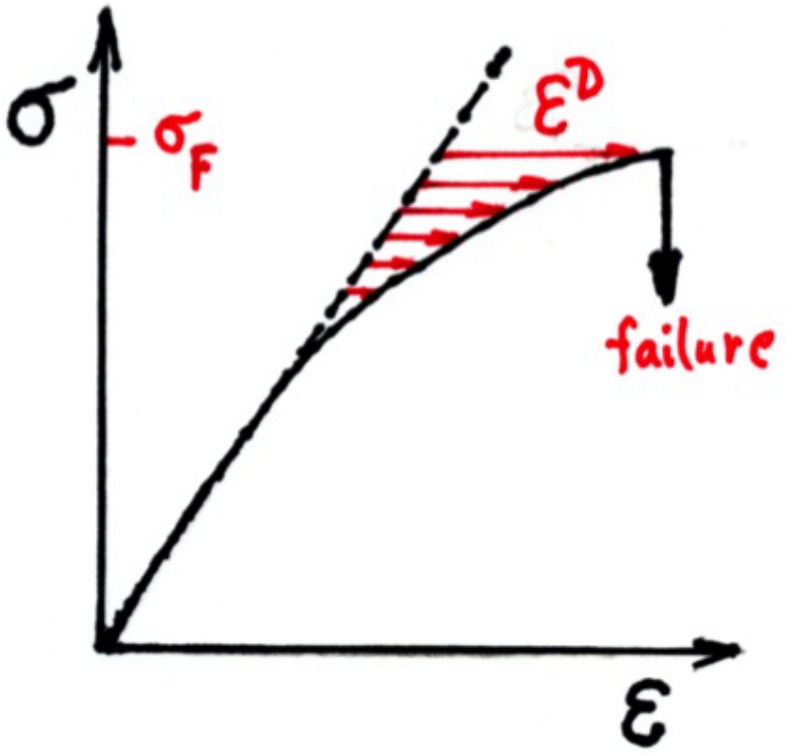
歪速度依存性-wet, dry 環境

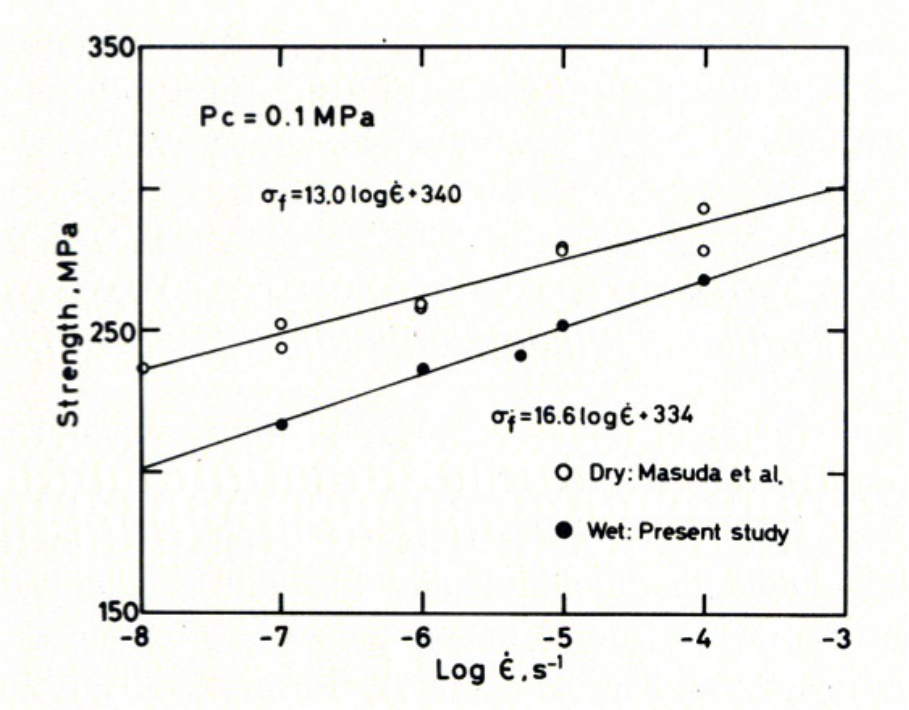
- wet と dry で、大きな違いはしない。1 桁くらい。

高圧下での歪速度依存性

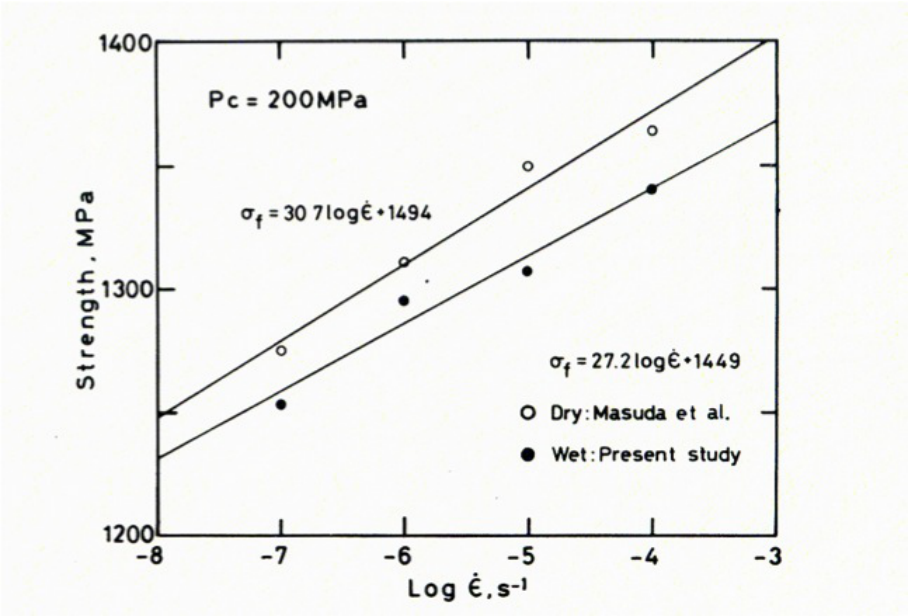
- 封圧を高くすると、歪速度依存性は大きくなる。


σ
σ
σF


σ
σF
εD
failure
ε

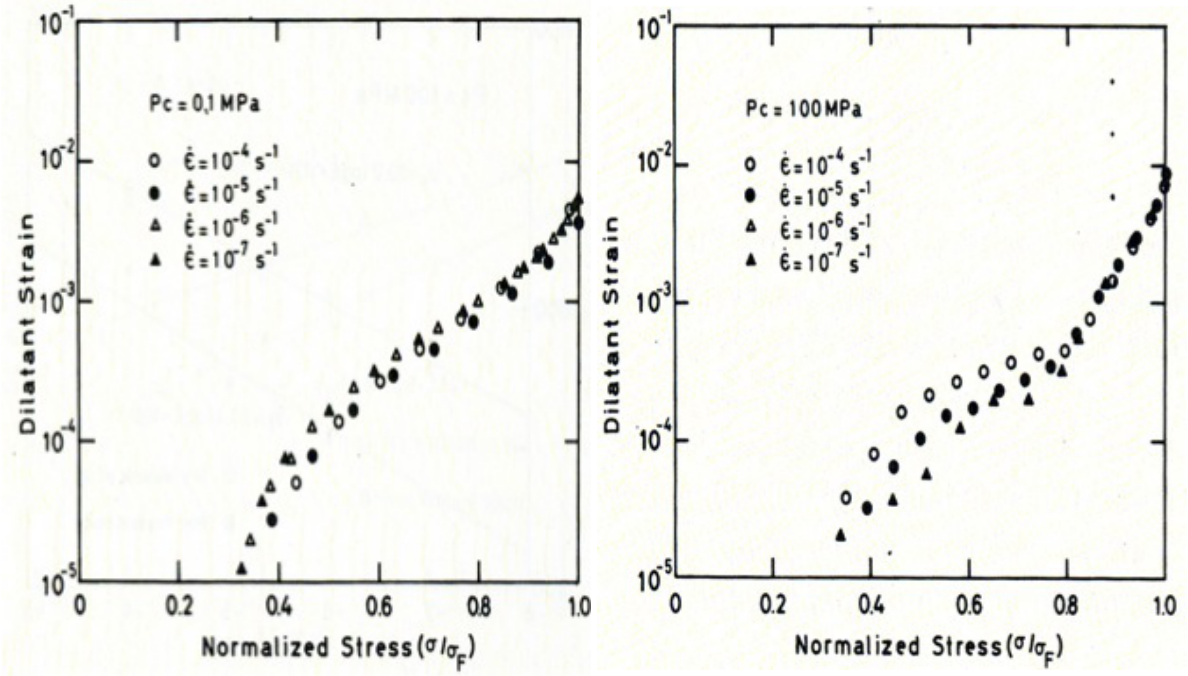


- 前の図とは比べにくい。勾配だけに注目。



Dilatancy は歪速度によらない

- ダイラタント歪 (体積膨張に対応) は、破壊強度で規格化するのと同じ。



岩石破壊の統一理論

- 前提：岩石が壊れる ← クラックが成長していって、相互作用。
- クラックは応力腐食現象として考える。

これらをもとにして、理論を構築。

Q&A

質問： 応用範囲は、マントル対流のようなゆっくりとして現象？
天体衝突のような大きな現象？

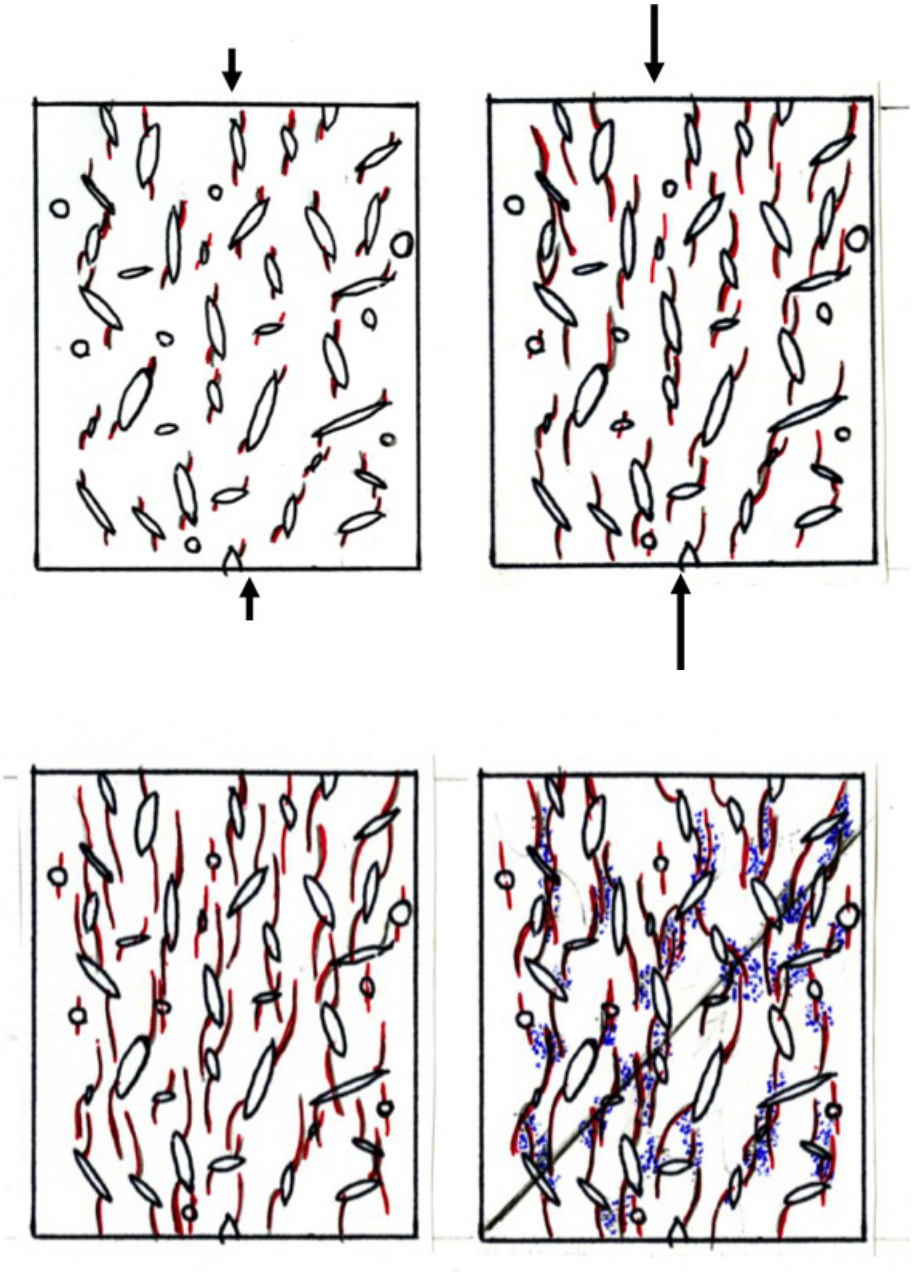
答え： ゆっくりとした現象に意味がある。惑星に使える。潮汐破壊とかには使える。
strain rate の上限までは使える。

半理論的考察：クラックモデル

- 岩石を横 (図では縦) から押すと、クラックの根本から延びる。

クラックモデル (2)

- 応力が高くなると長くなる。つながって、全面破壊に至る (という風に想像できる)。
- 隣のクラックまで延びるとお互いに影響。ある長さまで、クラックが延びたら、岩石が割れる。このように考えると、破壊現象が表現できる。

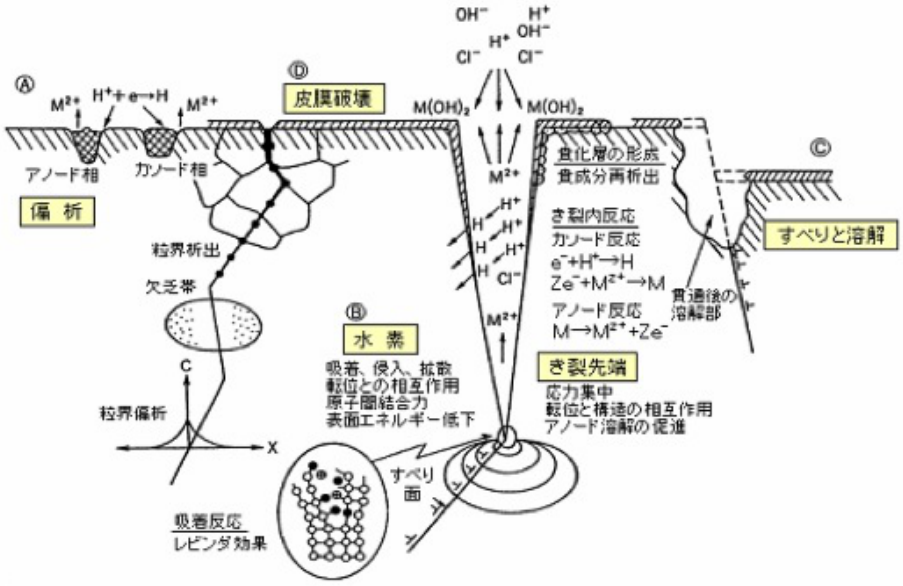


クラックの進展

- 金属は、圧縮では壊れない、応力侵食
- 亀裂の先端で、応力集中が起こる。ここでいろんなこと (化学反応) が起こる。

岩石の応力腐食

- Si-O-Si が Si-OH · HO-Si と侵食され、弱い H-H ボンドが切れる。
- 水蒸気が入るとクラックの先端でこの反応が起こる。→ クラックが成長。



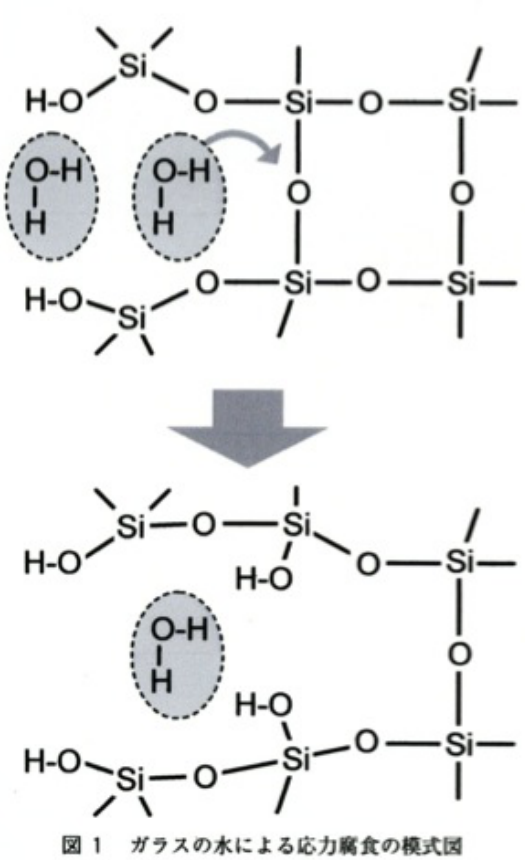


図 1　ガラスの水による応力腐食の模式図

クラック進展速度 (Widerhorn 1967)

- P_{H_2O} の n 乗に比例する。

$$\nu = AP^{*}_{H_2O} \exp\left(-\frac{U - fV^{*}\sigma}{RT}\right)$$

クラックの長さの時間変化

クラックの進展速度が以下のように表せるとする。

$$a = a_0 + \int v\mathrm{dt}$$

$$v = AP_{\mathrm{H_20}}^{n} \exp\left(-\frac{U - fV^*\sigma}{RT}\right)$$

a:クラックの長さ, a_0: クラックの最初の長さ, v:クラックの進展速度

ここで、時間変化するものは圧力 σ なので、これが分かれば、積分できる。

a が破壊の Criteriona_{critical} を超えたときとすると、破壊のスケーリング則が求められる。

疲労破壊の場合

一番な簡単な場合は、σ が時間に依らない場合。このようにストレスが一定であったとしても、いずれ破壊する。これを遅れ破壊とか疲労破壊という。

前述の式は、積分すると以下となる。

$$a = a_0 + AP_{\mathrm{H_20}}^{n} \exp\left(-\frac{U - fV^*\sigma}{RT}\right) \cdot t$$

a がある critical な長さになり、$a \gg a_0$ として a_0 を無視する。両辺の対数をとると、

$$\ln a_{\mathrm{crit}} = \ln A + n \ln P_{\mathrm{H_20}} - \frac{U - fV^*\sigma_f}{RT} + \ln \tau$$

τ は疲労破壊するまでの時間。すなわち、ストレスとの関係は以下となる。

$$\ln \tau = \ln \tau_0 - \frac{RT}{fV^*} \ln \sigma.$$

疲労破壊の時間とストレスとの関係をプロットするとその勾配から fV^* が推定できる。

疲労破壊の場合、疲労破壊するまでの時間とストレスとの関係はこのように対数-対数の関係でまとめられる。

歪速度一定の場合

歪み速度 $\dot{\sigma}$ 一定を、ヤング率 E を用いると、弾性的な段階では $\dot{\sigma} = E\dot{\sigma}$ としてストレス増加速度一定。このように考える。

ストレスはストレス増加速度一定で時間と共に $\sigma = \dot{\sigma}t$ と考える。すると $dt = d\sigma/\dot{\sigma}$ となる。よって、

$$a = a_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t = a_0 + \frac{1}{\dot{\sigma}} \int_0^\sigma v\mathrm{d}\sigma$$

これを積分すれば、任意時間のクラックの長さは a 以下のようになる。

$$a_{\mathrm{critic}} = a_0 + \frac{AP_{\mathrm{H_20}}^n}{\dot{\sigma}} \frac{RT}{fV^*} \exp\left(-\frac{U}{RT}\right)\left\{\exp\left(\frac{fV^*\sigma_f}{RT}\right) - 1\right\}$$

$a_{\mathrm{crit}} \gg a_0, \exp\left(\frac{fV^*\sigma_f}{RT}\right) \gg 1$ を仮定すれば、次式が得られる。

$$\ln a_{\mathrm{crit}} = const. + n \ln P_{\mathrm{H_20}} - \ln \dot{\sigma} + \frac{fV^*}{RT}\sigma_f$$

これから、

$$\sigma_f = \sigma_0 + \frac{RT}{fV^*} \ln \dot{\sigma}$$

$$\sigma_f = \sigma_0 - \frac{RT}{fV^*} \ln {P_{\mathrm{H_20}}}^n$$

すなわち、早く壊そうと $\dot{\sigma}$ を大きくすると、係数 RT/fV^* 分だけ岩石の強さが大きくなる。また水蒸気圧を大きくすると、岩石の強さは小さくなる。その勾配も係数 RT/fV^*.

fV^* は岩石の種類によって違うが、1 つの岩石ならば同じ値になる。

Q: n はどのぐらいの値ですか？

A: 反応に関与する分子の数だから、おそらく 2 ぐらいにかな。2 か 1 かそのぐらいの値であまり大きな値にはなっていない。

岩石破壊の Mizutani スケーリング則

まとめ

1. 破壊強度 σ の歪み速度依存性

$$\sigma_f = \sigma_0 + \frac{RT}{fV^*} \ln \dot{\epsilon}$$

2. 破壊強度 σ の水蒸気圧依存性

$$\sigma_f = \sigma_0 - \frac{RT}{fV^*} \ln {P_{\mathrm{H_20}}}^n$$

3. 疲労破壊までの時間 τ の応力依存性

$$\ln \tau = \ln \tau_0 - \frac{RT}{fV^*} \ln \sigma.$$

岩石破壊スケーリング則

- 岩石はとても難しい集合体だと思っていたが、実験的に見ると、また簡単な理論から見ると比較的容易に理解できる現象であった。
- これは私が面白く感じたところであった。このきれいな法則性が普通の岩石力学の教科書に載っていないということが不思議だ。
- ただ、これがすぐ地震の予知に使えるかどうかは問題である。こんなきれいな法則性が自然界の破壊現象ではどうして起きていないのかが次なる大きな問題である。

Q and A

Q: 月震の原因は基本的に潮汐で起きているんですか。
A: 基本的に潮汐力で起きてるでしょう。

Q: 月の内部はドライなのですか？
A: それはほんとはよくわかりません。表面はドライでしょうね。表面から 100km ぐらいはドライなのではないでしょうか。衝突があるのでそのあたりのものはドライになってしまっているんじゃないかと思ってます。しかし、それより深い所ではどうなっているかはわかりません。表面の玄武岩を作ったマグマの元も H2O を含んでいなく、明らかにドライ。だからマグマが生まれた 200-300km ぐらいまではドライと思っていいかもしれません。

Q: ここでいう岩石というのは地球上の岩石だけでなく、他の天体のものも含めて良いのか？
A: はい、たぶんよいでしょう。

Q: 真空だと岩石強度が上がるという話がありましたが、それはこれで説明し

たことになるのですか？
A: なると思う。つまり真空というのは水蒸気圧はうんと小さいと考える。

Q: 水蒸気が例えば、他の原子がいろいろ混じっている場合も同じことですか？
A: 他のガス例えば、アルゴンやキセノンなどそういうものがあったらどうかというと、希ガスは影響しないでしょうね。ここでの話だと SiO2 ボンドに直接反応するようなものでないといけないから。窒素とかは多少影響するかもしれない。反応性の少ないガスが入ってもなんら影響はないでしょうね。

あまり言わなかったが、ここでの話は圧縮力で石を壊す場合。引っ張るときはクラックの伸び方も違うといいましたが、これはまた違った話になる。惑星の破壊現象では引っ張る力で割る場合が多いいからここで話した内容と違ってくるでしょう。

Q: この話は岩石力学の教科書にも書いてないとのことでしたが、ということは水谷さんが発表されていないということなんですか？
A: 岩石力学の人が地球物理学の勉強をしていなということもあるでしょうね。僕が盛んに宣伝しているということもないのでそういうこともあるでしょうけど。もうちょっと宣伝した方がよかったかな。でも、知ってる人はしっているんですけどね。知らない人の方が圧倒的に多い。それから岩石力学専門の人はあまり知らない。

Q: 日本の研究者には継承されているんですか？
A: 日本の研究者に何人この Mizutani スケーリング知っている人がいるか、んー 10 人ぐらいかな。今日だいぶ継承したんじゃないかな。

Q:実験で行われた温度圧力の範囲は実際の、地球内部のどのあたりの深さですか？
A: これは 2kbar で行ったから、6 ｋｍほど。地殻の上層部だね。

Q: 温度依存性はあるのですか？
A: 温度依存性は入れてないから、実験的に確かめる必要はある。熱活性化過程かどうかぐらいは確かめた方が良い。それは残念ながらやっていない。誰か

やらないかね。岩石破壊が熱活性化過程であるということを言うだけで立派な論文になると思う。

Q: 水を入れると岩石がやわらかくなるというのは、SiO2 のボンドを切るからということでした。それの逆で CO2 を入れると割れにくくなるんですか。
A: 水をいれたものよりは割れにくくなると思う。それは水素ボンドよりも弱いものは無いと思うから。

Q: これがあまりはやらなかった理由というのは何かというと、大きな現象にうまくつなげられないというこなのか？
A: そうそう。だから僕は大きな現象を歪み速度でつなげようとしたんだけど、それぐらいではあまり面白くなかったのかな。

Q: ヒステリシスの話とはつながるのか？
A: これはつながってないね。つながってないけれど何かあるかもしれないね。応力によってクラックの進展がどれくらい変わるかというので間接的にあるかもしれない。

Q: 基本的にクラックは伸びるけれど、ガスを抜くと開いたところは閉じるんですか？
A: 閉じると思う。水蒸気がなければ、新鮮な表面はまたぴたっと元に戻る。

Q: 岩石をきって断面をみたら、最初にあるクラックは見えるんですか。
A: 今仮定してるようなクラックは見えない。もちろんクラックはたくさんあるけど、マクロなクラックよるもはるかに小さなクラックがたくさんあるというふうに考えた方がいい。

Q: 世の中で実際起きることは、最初にどんだけ大きなものがあるかということでほとんど全部決まるのかなと思うのは間違いないですか？
A: 大きい現象はひょっとしたらそうかもしれないけれど、少なくとも手のひらサイズの岩石ではそういうことはない。

Q: これをはやらせようとしたらどうすればよいでしょうか？

A: これは式がきれいじゃないですか。だから法則性としては面白いじゃない。それだけのこと。

Q: もっと注目を浴びてもいいものではないか？
A: そうだよな。僕はそう思う。

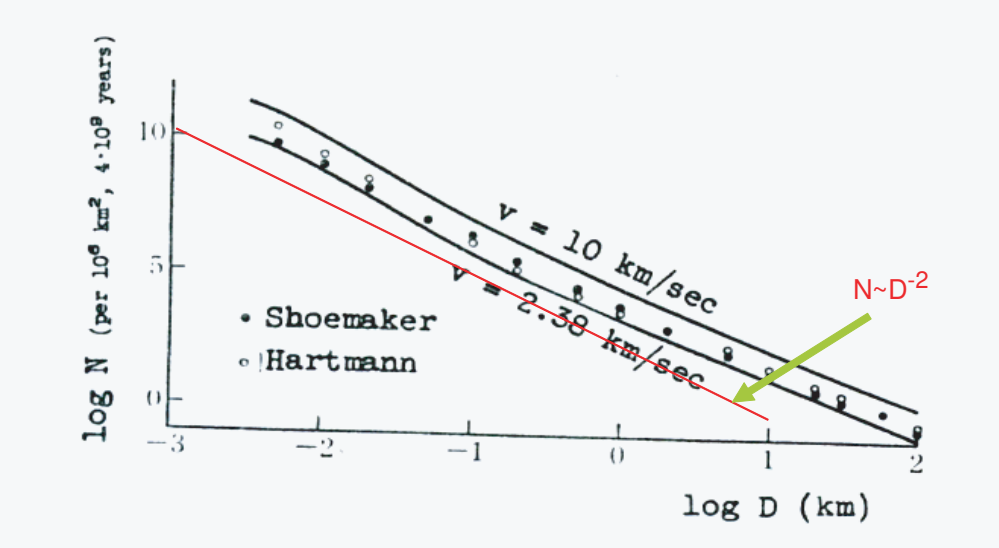
4　衝突現象のスケーリング則

4.1　イントロ

月の孔の大きさと月のクロノロジー

1966 年に岩波「科学」に 2 ページの短い記事を竹内均先生と共著の論文として投稿した。当時「月の孔の大きさと月のクロノロジー」というタイトルで寄稿した。これはそのときまだクレーターという言葉が一般的には認知されてなかったため。なので月の孔と書いた。これは日本でクレータリングクロノロジーの一番最初の小論だと思う。

イギリスの天文学者 Kopal の総合報告があって、その総合報告の中に以下のような図がでていた。彼は月の表面にあるのは小惑星がぶつかってできた孔であると考えた。小惑星軌道にあるものが、月に当たる確率は öpic という人がいて、その人が計算した理論式がある。それを元に 40 億年分月の表面にあたるものを計算し、月のクレーターの数と比較した。

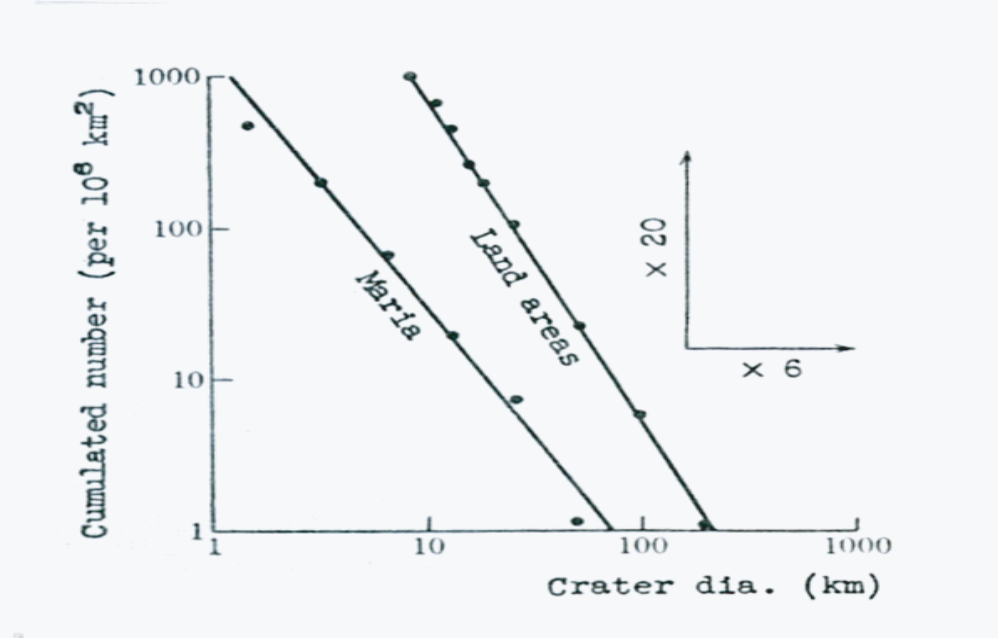


- D:クレーターの大きさ, N:クレーターの累積数の密度
- 実線は小惑星が月面に衝突する頻度から計算された 40 億年分のクレーター密度である。衝突速度を 10km/s, 2.38km/s(月の脱出速度) を仮定。
- 月の海のクレーターの数は 40 億年分小惑星がぶつかってできた数とだいたい

一致する

- Kopal の結論は月の海はおよそ 40 億年の年代を持つということだった。

月の海と高地のクレーターの数



- Maria は月の海、Land areas は月の高地を指す。
- 高地のクレーター密度は海のクレーター密度の 20 倍、大きさは 6 倍
- 月の重力は地球の 1/6 だから、地球におけるクレーターよりも 6 倍大きなクレーターができるのではないかと考えた。つまり同じエネルギーを持った小惑星がやってきても、地球にできるクレーターの大きさと月にできるクレーターの大きさは違って、月の方が 6 倍大きくなると考えた。
- 本当は Land areas の方の線に Kopal の計算は近いのではないか、という風に考えた。なので高地にあるクレーターの数が Kopal の計算で説明できて、海の方は 40 億年の 1/20 で 2 億年ぐらいになるになると考えた。

このようなことを小論を岩波の「科学」に書いた。

しかし、このことは間違った推論であったことが後から分かった。
重力が小さくなると、それに比例してクレーターの大きさが大きくなるとしていた。$D \propto g^{-1}$.
しかし、後から実際によく調べるとクレータの大きさは $D \propto g^{-1/6}$ あるいは $D \propto g^{-1/4}$ ということがわかってきた。

クレーター生成頻度が今と過去と同じであるとしていた。しかし、昔はもっと頻度が高くぶつかっていたということがだんだんわかってきた。
このようなことで間違った結論を出していた。

しかし、クレーターの数から年代を推定に使える方法であることは広く認識されたと思う。Kopal はそういうことができるといったというので一番えらかった。それに早い段階から我々もとびつきこのようなことを言い始めた。

Q: はじめに重力とクレーターの大きさが反比例すると考えたのはどうしてか？
A: 静水圧 mgh を考えた。同じ速度でとびだしても 6 倍遠くにいくでしょう。だからクレーターも 6 倍大きくなるでしょうという考え。

このようなことがきっかけで月のクレーターや天体のクレーターは面白いと興味を持ち始めた。コロラド大学で岩石破壊の実験をやっていたとき、十分時間があったのでクレーターのいろいろな論文をよんでいた。クレーターの大きさとエネルギーの関係についていっぱい研究されていることを知った。アメリカでは兵器の開発として弾丸を撃つとどのぐらいの孔があくとか、どのぐらいの鉄板をつきやぶるかといった研究が非常にたくさんあり膨大な量のデータがあった。そういったものを種にした研究というものがたくさんあった。それを片っ端から読んでみた。ところがどれを読んでも私が関心するようなものはなかった。

実験的な経験式の例

例えば、その当時最も有名なのは、Gault という人で、この人はクレーター科学の一番最初の偉い人。クレーターの半径 R は衝突体のエネルギー W の 0.37 乗に比例するといった。

$$R(\mathrm{cm}) = 0.75 \times 10^{-3} \rho_{\mathrm{p}}{}^{1/6} \rho_{\mathrm{t}}{}^{-1/2} W^{0.37}(\mathrm{erg})$$

ρ_{p}:衝突体の密度, ρ_{t}:ターゲット密度これでよくクレーター半径を予測できると言った。
しかし、なぜ 1/6 乗や-1/2 乗、0.37 乗とは一体何のことか、私にはわからなかった。このような式を出すということは実験で行った範囲外で、外挿できるという意味があるからこのような式を作っているのでしょう。実験値を説明するのはいいが、物理メカニズムも分からずに、行った実験範囲以外にこの式を適用するということは

恐ろしい。成り立っている範囲がわからないからである。

Summers and Charters はクレーターの直径 d と深さ h の関係を示した。

$$\frac{h}{d} = 2.28 \times \left(\frac{\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{t}}\right)^{1/3} \left(\frac{v}{c}\right)^{2/3}$$

これは全て無次元数なので納得はできる。

Rolsten et al. (1966)

$$R = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\mathrm{t}}\right)^{1/3} W^{1/3}$$

σ_t:破壊強度 (圧力と同じ次元) これも次元が合う。

このような 2 つの式は例外的に次元があっている。少なくともこのように理解できるような式であってほしいと思っていた。

もう１つの数値的経験式

いろいろな衝突条件のもとで数値実験をして圧力伝播がどうなっているかを示したものがある。

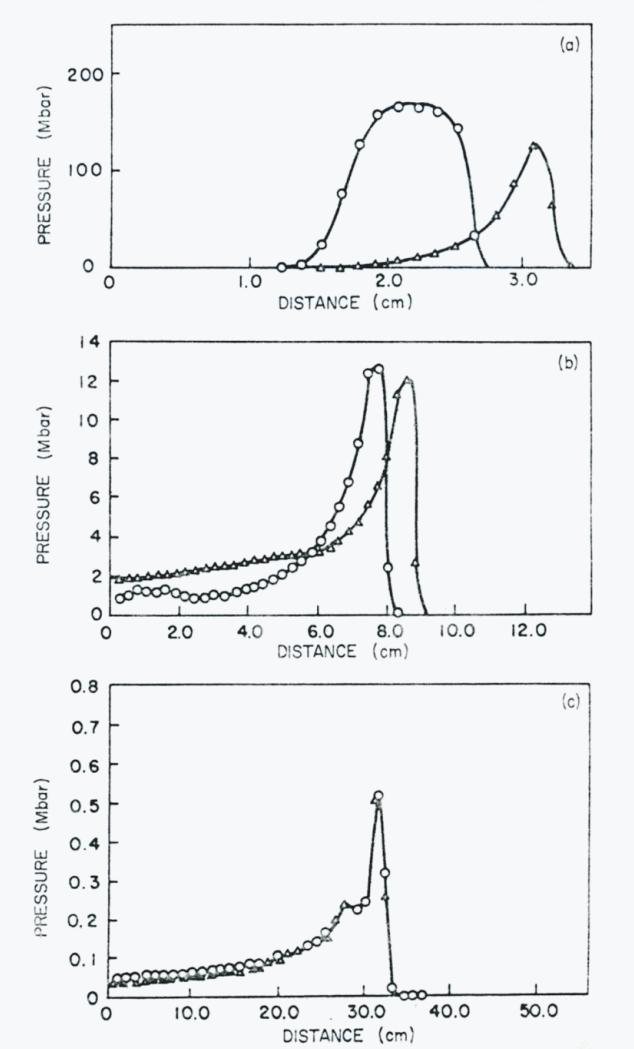
- 円形のプロットは低速度で大きなものがぶつかった場合、三角のプロットは高速度で小さなものがぶつかった場合
- (a), (b), (c) は時間順。
- 衝突したはじめの頃では波形は異なるっているが、だんだん後になってくると似ている。

Dienes and Walsh (1970) はこのように衝突の後の段階で波形が似てくる条件の組み合わせを調べたところ、弾丸の大きさ L_p, 速度 v としたときに、

$$L_\mathrm{p} v^\alpha, \qquad \alpha = 0.58$$

といった値が一定でありさえすれば、最終的な結果は同じになることを発見した。これを解釈するのに彼らは以下のように考えた。圧力は衝突したときに非常に高い圧力を持つ。衝突点からの距離 r が遠くになるにつれて減衰する。

$$\begin{aligned} P(r) &\propto v^2 \left(\frac{r}{L_\mathrm{p}}\right)^{-2/\alpha} \\ &\propto \left(\frac{r}{v^\alpha L_\mathrm{p}}\right)^{-2/\alpha}. \end{aligned}$$



これによれば、P は $r^{3.45}$ に反比例して減衰することになるが、数値計算の結果はそうなっていない。なので明らかにおかしいけれども、彼らはそうだと考えた。

クレーターの科学

このようにわからなかいことはいっぱいあったが、データはたくさんあった。それをまとめて本にしようと思いクレーターの科学という本を書いた (1980)。

そのあと Melosh が“Impact Cratering”(1989) という本をだした。中身はだいたい同じようなことを書いている。つまり、日本では非常に早い時期にクレーターのサイエンスというものを紹介したと思っている。惑星科学として面白い分野があることを紹介できたと思っている。

Impact Process Scaling

これから話すのは、以下のものからである。

- Cratering Experiments in Sands and a Trial for General Scalin Law, J.Geophys. Res. 88, A835–A845, 1983.
- New Scaling laws on Impact Fragmentation, Icarus 87, 307–326, 1990.
- Mizutani and Fujiwara (1984)　惑星を壊す、「現代の太陽系科学」(上) 第 13 章、257–303、東京大学出版

20 年以上前の話であることに注意してほしい。私がどのようにして考えてきたかについて分かってもらえたら良い。

高速度衝突で何が起こるか

月面のような大きなものに小惑星のような小さなものがぶつかるようなことを考える。

物体の音速よりも速い衝突速度でぶつかると、衝撃波が発生して非常に高い圧力になる。接触面の端は特に高い圧力でここからものが飛びだす。高い圧力の部分が物体内に広がっていき、ものを飛ばしながら最終的にはクレーターができたと考える。

この物理学をなるべく単純化して考えたい。

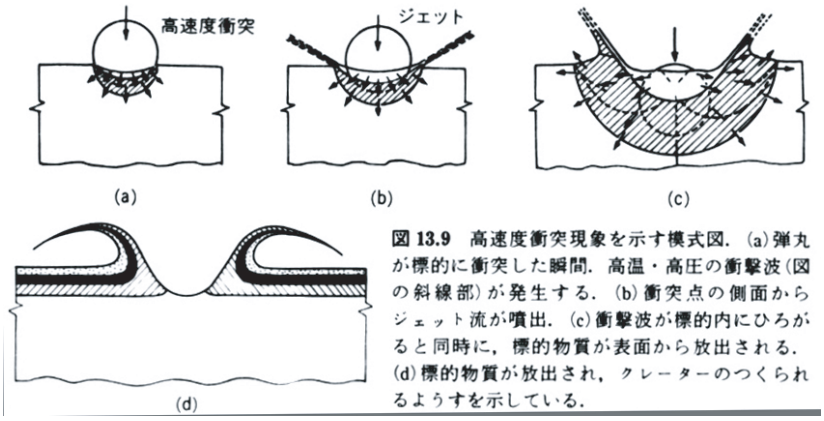
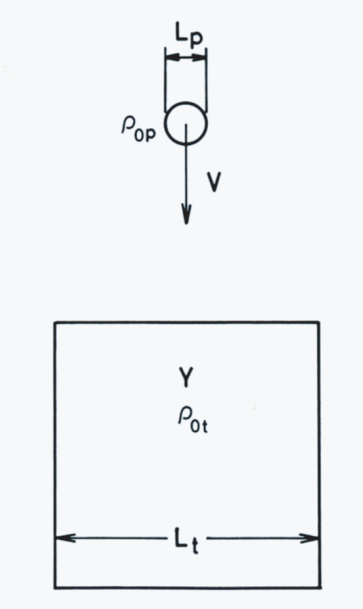


図 13.9　高速度衝突現象を示す模式図．(a)弾丸が標的に衝突した瞬間．高温・高圧の衝撃波(図の斜線部)が発生する．(b)衝突点の側面からジェット流が噴出．(c)衝撃波が標的内にひろがると同時に，標的物質が表面から放出される．(d)標的物質が放出され，クレーターのつくられるようすを示している．

弾丸が標的に衝突したあと

直径 $L_{\rm p}$, 密度 $\rho_{0\rm p}$ の弾丸が衝突速度 v で、破壊強度 Y, 密度 ρ_{0t} の標的に衝突することを考える。標的の代表的な長さを $L_{\rm t}$ とする。

そうすると数値計算の結果を見ると、$L_{\rm p}$ よりも少し大きい直径を持つ高い圧力帯



ができることがわかっている。これを Isobaric core とよぶ。Isobaric core の中は同じような圧力になっていて、球状の高圧帯となっている。この Isobraic core の直径 d は $d = \eta L_p$ で η はだいたい 1-3 ぐらいである。これはパラメーターとして残しておく。

衝撃波が伝播する様子

衝撃波伝播の様子の模式図

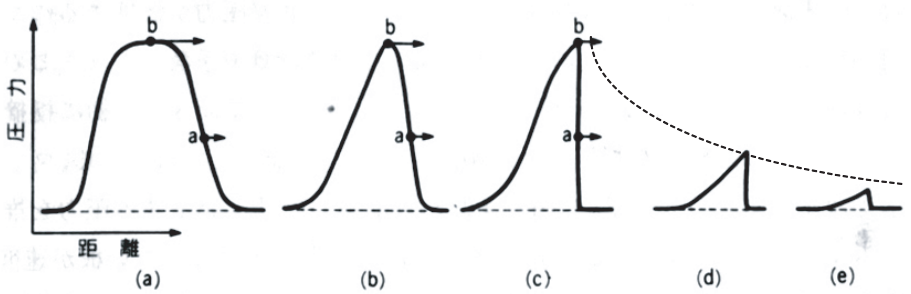


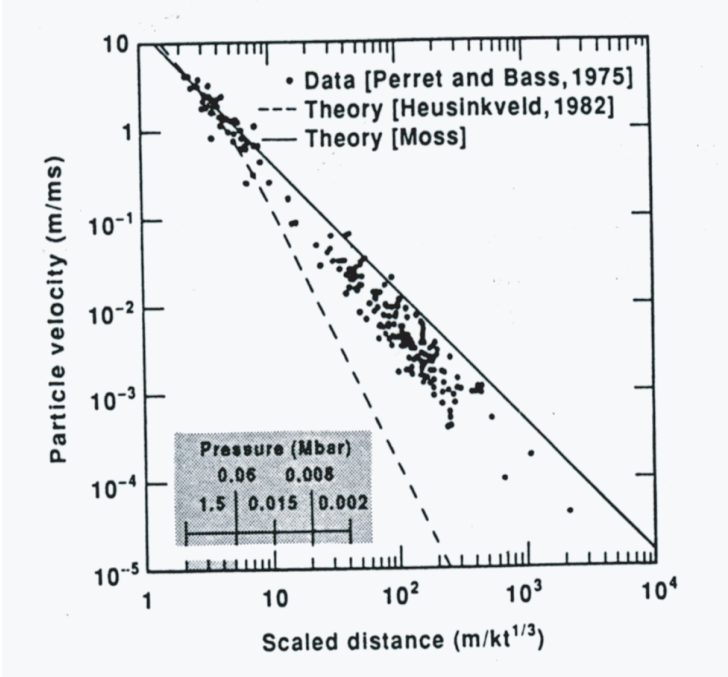
図 13.10 衝撃波の伝播されるようすの模式図．(a)から(e)にかけて時間の経過とともに衝撃波の形，振幅がどのように変化するかを示している．

- (a) の山の平らになっているところが Isobaric core
- 時間とともに Isobaric core が外側に広がり、平らだったものがだんだ尖ってくる。
- 最終的に三角波のようになって、大きさも小さくなっていく。

- この減衰が距離の-α 乗に比例する考える (図の点線)。

地下核爆発のデータの解析

減衰がどうなっているかをわかるのはなかなか難しいことである。この当時は地下に埋めた核爆発の実験がたくさん行われていて、その周りでの圧力を計測しているデータがある。



- 横軸は核爆弾の量で規格化した爆発点からの距離、縦軸は物質の動く速度 u(particle velocity)
- ドットは核爆発実験データ、実線・点線は理論的な線
- 実線は $u \propto r^{-3/2}$ を表す

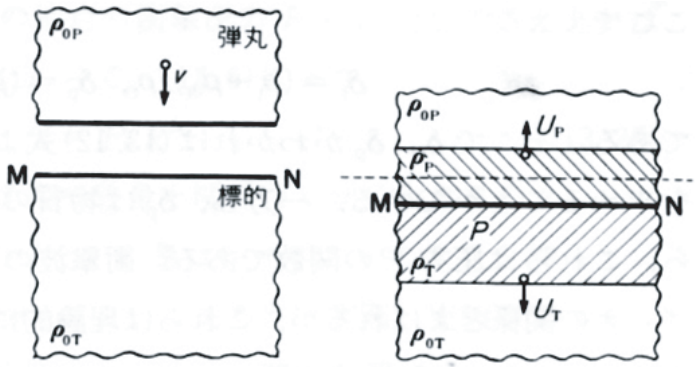
particle velocity と圧力との関係は $P = \rho_0 U u$ で表される。U は shock wave velocity。shock wave velocity と particle velocity は近似的には比例関係があるので、圧力 P は particle velocity の 2 乗、すなわち距離 r の-3 乗で減衰する。これが核爆発の実験データが示すことのように思った。

高速度衝突による圧力

衝突体がぶつかったときの衝撃波がどのように伝播するのかを考えたいが、まずは最初に発生する衝撃圧を考える。

この元となるのはランキン[*1]–ユゴニオという 3 つの方程式

$$U\rho_0 = (U-u)\rho$$
$$P = \rho_0 U u$$
$$E = \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)$$



- 弾丸が標的にぶつかり、境界面 MN が下がる
- 衝撃波が弾丸方向と標的方向に走り高い圧力になる (斜線部)
- この部分の衝突前後での質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則を解くとランキン–ユゴニオの 3 つの式が導かれる。

境界条件を考える。

衝撃波の境界面が接しているため、弾丸側の圧力 P_p と標的側の圧力 P_t は等しい。また、接触面の移動速度は、外から見ている人にとっては、弾丸側は衝突速度 v と弾丸の particle velocity u_p を用いると $v - u_\mathrm{p}$ である. また、標的側では particle velocity u_t である。弾丸と標的は接触しているので、これらは等しいことが条件である。よって、

$$P = P_\mathrm{t} = P_\mathrm{p},$$
$$u_\mathrm{t} + u_\mathrm{p} = v.$$

これらは弾丸側と標的側に関してそれぞれ 2 つの式があるので、計 6 個の式。

今、未知数は弾丸側と標的側それぞれ U, u, ρ, E, P であるので、全部で 10 個。

[*1] イギリスの科学者。グラスゴー大学の先生。グラスゴー大学はケルビン卿 (トムソン) がいたところであり、ランキンも一緒に働いていた。日本では東大の前身の工部大学高というものが作られており、そこへグラスゴー大学から良い先生をいっぱい導入した。ランキンがその良い先生たちを選び紹介して、工部大学高へ行かせたという。日本にとっては本当はなじみのある先生である。

衝撃波の速度 U は、その物質の音速 C_0 と particle velocity u, と物質定数 s を用いて以下のように書ける。

$$U = C_0 + su$$

これは衝撃波速度と粒子速度を結びつける、一種の状態方程式である。経験式であるが、非常に多くの物質で成り立っていることが実験的に示されている。
未知数 10 個に対して、ランキン–ユゴニオの式 6 個、境界条件の式 2 個、そして弾丸側と標的側に関するこの状態方程式の 2 個の計１０個の式が得られるので、解くことができる。
以上の式より圧力 P は、

$$P = \frac{\rho_0 {C_0}^2 \delta}{(1 - s\delta)^2}$$

ここで

$$\delta_\mathrm{t} = (\rho_\mathrm{t} - \rho_{0\mathrm{t}})/\rho_\mathrm{t}, \quad \delta_\mathrm{p} = (\rho_\mathrm{p} - \rho_{0\mathrm{p}})/\rho_\mathrm{p}$$

これら δ は圧縮による体積歪みを表す。
この δ がぶつかってくるものの速度とどのように関係があるかを知りたい。未知数１０個の式に対し１０個の方程式があるのでこれは求まる。最終的に、発生する高い圧力 P_0 は以下のように書ける。

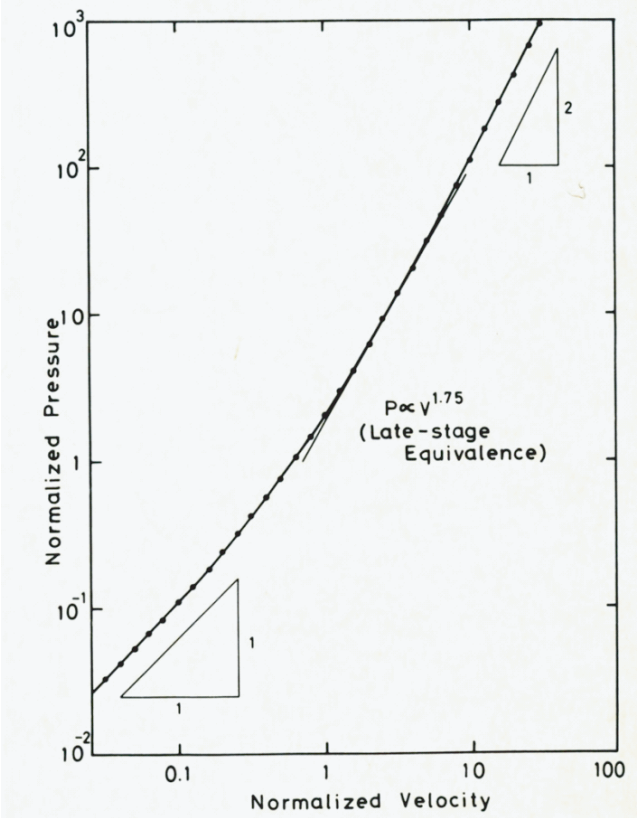
$$P_0 = \frac{1}{2}\xi\rho_{0\mathrm{t}}{C_\mathrm{t}}^2\left(1 + \frac{1}{2}s_\mathrm{t}\xi\frac{v}{C_\mathrm{t}}\right)\left(\frac{v}{C_\mathrm{t}}\right).$$

ここで、

$$\xi = \frac{2}{1 + \left(\frac{\rho_{0\mathrm{t}}\delta_\mathrm{p}}{\rho_{0\mathrm{p}}\delta_\mathrm{t}}\right)^{1/2}},$$
$$\xi \simeq \frac{2}{1 + \left(\frac{\rho_{0\mathrm{t}}C_\mathrm{t}}{\rho_{0\mathrm{p}}C_\mathrm{p}}\right)}.$$

この式を書きなおすと以下の式となる。

$$\frac{P_0}{\rho_0 {C_\mathrm{t}}^2/s_\mathrm{t}} = \left(\frac{v}{2C_\mathrm{t}/s_\mathrm{t}\xi}\right) + \left(\frac{v}{2C_\mathrm{t}/s_\mathrm{t}\xi}\right)^2.$$



発生圧力 P_0 をこのように規格化すると、衝突速度 v の 1 次式と 2 次式の和で表される。分母は物質定数になっている。これをグラフにすると以下のようになる。

衝突速度が小さいところ (音速より小さい) では衝突速度の 2 次式の方が目立たなくなり、圧力は衝突速度の 1 次式になる。音速より非常に衝突速度が速いところでは衝突速度の 2 乗に近くなる。

多くの実験範囲はこの規格化圧力が衝突速度の 1 乗と 2 乗の間の領域で行われている。そこで、この 1 乗と 2 乗の中間を近似できるような式を作ると以下のようになる。

$$P_0 \simeq \frac{2\rho_0 {C_\mathrm{t}}^2}{s_\mathrm{t}} \left(\frac{v}{2C_\mathrm{t}/s_\mathrm{t}\xi} \right)^a .$$

ただし、$a = 1.75$.

衝撃圧力の減衰

衝撃圧は isobaric core から球状に広がって減衰していく。

$$P = P_0 (r/L_\mathrm{p})^{-b}$$

核爆発の実験結果を見ると、$b = 3$ に近い結果を示している。そこで、ここでは $b = 3$ と仮定してみる。

$$\begin{aligned} P(r) &= P_0 \left(\frac{r}{L_\mathrm{p}} \right)^{-3} \\ &= P_0 {L_\mathrm{p}}^3 / r^3 \end{aligned}$$

つまり、

$$I = P_0 {L_\mathrm{p}}^3$$

この I の値が同じであれば、同じ現象が起こると予想される ($P(r)$ が同じ値になるため)。これはエネルギーの次元を持つので、late-stage effective energy と呼ぶことにした。これは Dienes and Walsh の late-stage equivalence と呼ばれた現象の理論的説明になっている。

P_0 に先ほど導いた式を用い、I を近似的に書きなおしてみると、以下となる。

$$I \propto v^a {L_\mathrm{p}}^3 = \left(L_\mathrm{p} v^{\frac{a}{3}} \right)^3$$

ここで、$a = 1.75$ であったので $a/3 = 0.58$ となる。これは Dienes and Walsh のマジックナンバー $\alpha = 0.58$ と同じになる。ということで 0.58 という値は、物理的にはこのようなメカニズムだった。

Q: Dienes and Walsh の 0.58 という値はこのような考察から生まれた数字ではなかったのか？

A: そうではなくて、いろいろな数値実験をして $L_\mathrm{p} v^\alpha$ という組み合わせを考え、$\alpha = 0.58$ という値にしてみると結果が同じになるという発見を彼らはした。彼らの解釈はさっき説明したようにここで考えたこととは違っていた。彼らの数値実験の結果でも圧力減衰は-3 乗に近い値になっていたにもかかわらず、そうでない値を使う (3.75) と説明できますという理解しがたいことをいっていた。

Q:　グラフから有効数字 2 桁のですか？

A: この $a = 1.75$ は 1 と 2 の間の数字の切りの良い数字を選んできたというその程度の話で、これが 1.74 でも何でもよかった。ここではきりの良い数でこの 1.75 を使ったと思ってください。

Q: 数値実験ではランキン–ユゴニオは解いているのですか？

A: 最初の圧力を求めるときのランキン–ユゴニオは解いている。なので原理的には同じことをやっている。伝播をきちんと解いていっているということ。

Holsapple のスケーリング則

Holsapple(1981, 1983, 1987) は無次元量を組み合わせて、実験データに合致するパラメーターを探し出した。

大部分の惑星科学の人はこの Holsapple のスケーリング則を使っている。Holsapple は、無次元量でデータを表現しておいて、この無次元量を用いて実験データをフィッティングすることをやっている。

彼は Coupling Parameter と称するパラメーターが重要だといっていて、

$$C = L_{\mathrm{p}} v^{\mu} {\rho_{0\mathrm{p}}}^{\nu}$$

で表される。実験データから μ, ν は決まる。

これは Mizutani Scaling では、

$$C = L_{\mathrm{p}} [v/(C_{\mathrm{t}}/s_{\mathrm{t}}\xi)]^{a/b}$$

に相当する。Mizutani では C は発生圧力が衝突速度の 1 乗と 2 乗の間のベキ乗によるという近似を使っている。つまり音速に近いところ、すなわち弾丸や標的の音速の 1 倍や 2 倍といった衝突速度の場合はこのようなベキ乗で表して良い。しかし、それより大きい場合は発生圧力は速度の 2 乗になっていくので、これをそのまま使ってはだめだということを私は言っている。

しかし、Holsapple は度の範囲までも成り立つ式として考えるとしている。これは大間違いである。Holsapple のスケーリングは Mizutani のスケーリングのごく一部を表しているにすぎない。しかし、世の中の人はみな Holsapple のスケーリングを使用するので私は半分気に食わない。彼のスケーリング則は物理的な意味は無いのだから。だけど私のスケーリングは物理的な意味を明確にしているし、成り立つ条件もはっきりさせているのでこちらの方が良い。ただし、どうして人に好かれにくいかというと私のスケーリングには音速 C_{t} や s_{t} や ξ といった物性定数が入っている。これが分かっていないと予言がしにくい。これを測れと言われるとひと手間かかる。なので使いにくい式であることは確かである。Holsapple のスケーリングのように密度 $\rho_{0\mathrm{p}}$ と速度 v だと扱いやすい。扱いやすいけど本当ではないことを私はいいたい。ものの性質が入っていなくて圧力が決まるということがまずおかしい。物の性質が入っているのが私のスケーリングだが難しいからなかなかみんな使ってくれない。でも、論理的にいえば Mizutani Scaling の方がはるかに優れていると私は思う。

衝突破壊現象、NIDS の定義

小惑星同士が衝突したときに、どんな条件で小惑星が壊れるかという条件を考える。これまで見てきたように、圧力伝播は以下である。

$$P(r) = P_0 {L_\mathrm{p}}^3 / r^3$$

なので、ぶつかった場所の反対側 $r = L_\mathrm{t}$ での圧力は

$$P(L_\mathrm{t}) = P_0 (L_\mathrm{p}/(L_\mathrm{t})^3.$$

この圧力がターゲットの破壊強度 Y を超えたとすればターゲットが壊れると考える。

$$P_0 (L_\mathrm{p}/(L_\mathrm{t})^3 / Y \gg 1.$$

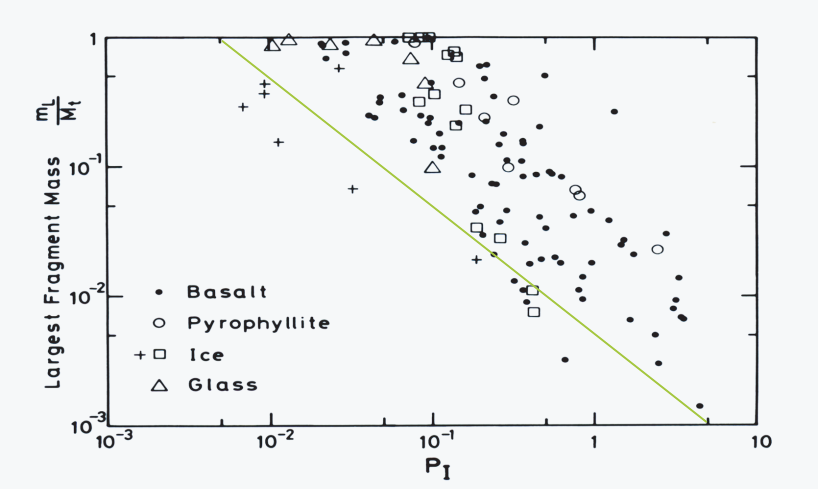
この左辺の大きさがターゲットに与えるダメージを表すと考え、これを P_I とする。

$$P_\mathrm{I} \equiv P(L_\mathrm{t})/Y = P_0 {L_\mathrm{p}}^3 / (Y {L_\mathrm{t}}^3).$$

これは無次元数になる。

衝突破壊によるサイズ分布

当時、京都大学の藤原さんが衝突破壊実験を行っていた。私たちもそれに参入し同じような実験をしてみた。



- 横軸は P_I, 縦軸は最大破片の質量 m_L を元のターゲットの質量 M_t で規格化した値
- データはばらついていうるようにも見えるが、物質によらずだいたい同じようなところにプロットされる。

- 実線は勾配 1 の線。

つまり P_{I} で表現すれば、物に依らず統一的に衝突のダメージの大きさを表すことができるということがわかった。

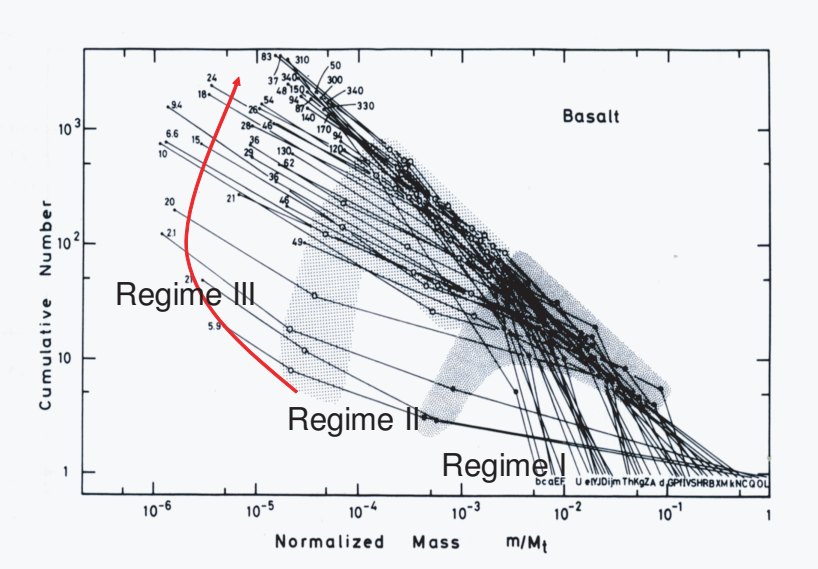
藤原さんは横軸を、弾丸の初期の運動エネルギーをターゲットの質量で割ったエネルギー密度 (単位ターゲットあたりのエネルギー) でプロットしていた。藤原さんの昔に行ったデータを、ターゲットの音速等を計測し P_{I} を計算して、同じグラフ上に描いたところ、やはり同じようなところにプロットされることもわかった。

$$\frac{m_{\mathrm{L}}}{M_{\mathrm{t}}} = C_1 P_I^{-\zeta}$$

で先ほどのデータ全てをフィッティングすると、

$$\frac{m_{\mathrm{L}}}{M_{\mathrm{t}}} = 10^{-1.627\pm0.061} P_I^{(-0.936\pm0.068)}$$

破片のサイズ分布

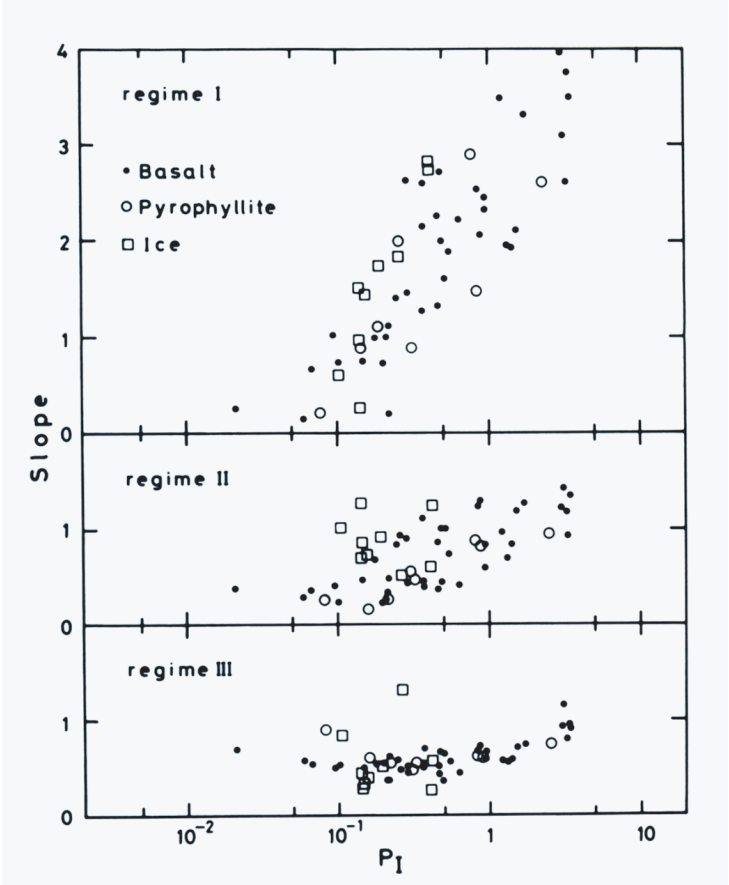


- 横軸は破片の質量 m を元のターゲット質量で規格化したもの、縦軸は m より大きいものの累積数
- さまざまな P_{I} での結果を一緒にプロットした図。
- 赤矢印の向きに進むほど PI が大きい実験。
- ターゲットが壊れるか壊れないかの実験を行うと、$m_{\mathrm{L}}/M_{\mathrm{t}}$ は 1 に近いし、小さな破片は多少できるがゆるやかな曲線となる。
- 破片の小さい方では、どの実験でも曲線は平行になっている (Regime III)

- この小さいところのサイズの傾きは-2 乗[*2]は、小惑星の大きさや月のクレーターの大きさのサイズ分布に等しい
- 破片の大きいところは異なる (Regime I)。激しい衝突のときは曲線の傾きは急になる。ゆっくり衝突したときは大きな破片が 1 個でき、その次に小さな破片の数は少なく曲線の傾きはゆるやか。
- これは玄武岩の結果であるが、どんな岩石であっても PI の変化によるこの傾向は変わらないでしょう

破片の大きなところ (Regime I) と破片の小さなところ (Regime III) とその中間の領域 (Regime II) での傾き γ を以下の式から求め,P_{I} との関係を見た。

$$N(>m) = C_3 m^{-\gamma}$$



[*2] ここの図では横軸質量でとっているので-2 乗にはなっていない

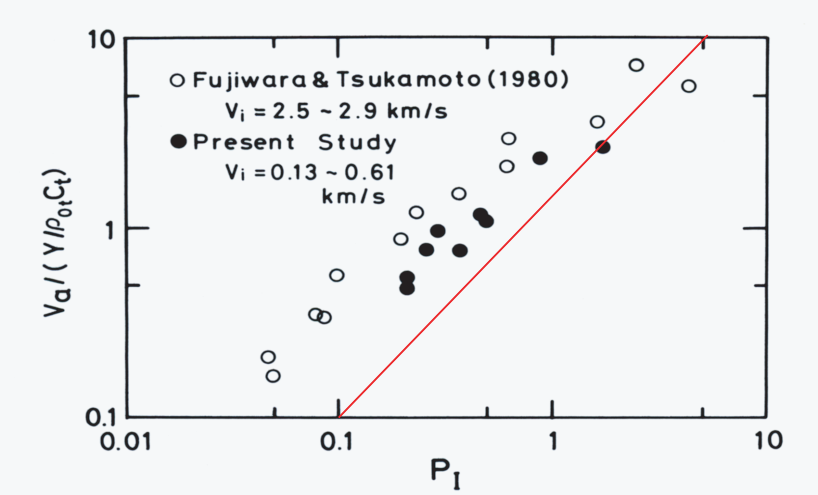
- 破片の小さい領域 (Regime III) では γ の値は 0.67（=2/3）に近い一定の値をとる。
- 破片の大きな領域 (Regime I) では、傾きは $P_{\rm I}$ と比例して勾配が大きくなる。
- 中間の領域 (Regime II) では、ごちゃごちゃしている。

Regime によって傾きは $P_{\rm I}$ の関数で表せられるので、$P_{\rm I}$ がわかればサイズ分布も予測はできるということがわかってきた。

破片の速度

飛び出す破片の速度も $P_{\rm I}$ に関係しているに違いないとし、反対点での破片の速度 (Antipodal Velocity)[*3]を考えると次式が得られる。

$$v_{\rm a} = c\left(\frac{Y}{\rho_{0t}C_{\rm t}}\right)P_{\rm I}$$



- Fujiwara and Tsukamoto(1980) は衝突速度が速い 2.5-2.9km/s の実験結果。
- 我々のものは、0.13-0.61 km/s と遅い衝突速度[*4]の実験結果。
- $P_{\rm I}$ と規格化破片速度は衝突速度の違いによらず同じような結果を示している。
- 実線は傾き 1 を示す線。

破片の速度 $v_{\rm a}/(Y/\rho_{0t}C_{\rm t})$ は $P_{\rm I}$ に比例することがわかった。

[*3] 標的が立方体のような形で、ある 1 面に衝突があったとき、その反対の面から破片が飛び出す速さ。
[*4] 私が名古屋で衝突実験をやろうと思ったとき、微惑星の衝突は衝突速度が遅いので、1 km/s を下回るようなうんと低い速度を出せる衝突装置を作って実験をたくさんやろうと思った。

P_{I} というのはなかなか有能であることがわかった。高速の物体が惑星表面にぶつかったときにどれぐらいの影響を与えるかということを予測する枠組みができたと思っている。

4.2 クレーターサイズのスケーリング則

クレーターサイズのスケーリング則 (1)

- max が 2 km/s、従来より遅い衝突現象を考えた。

Target の Characterization

「どういうターゲットだったか」をちゃんと測った

- 砂の Depth と固さ

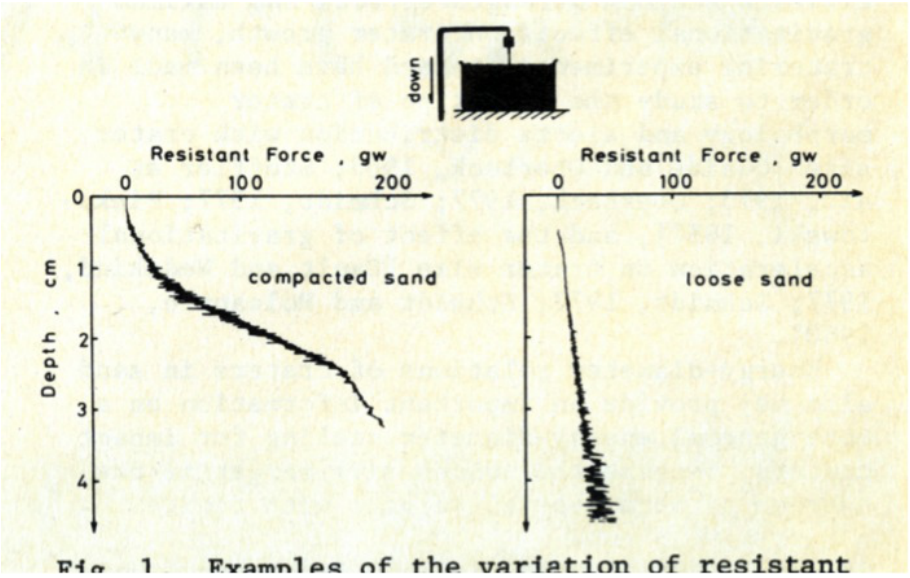


Fig. 1 Examples of the variation of resistant

クレーターサイズのスケーリング則 (2), (3), (4)

v~500 m/s お椀型

v~800 m/s より複雑になった。インパクターがあたったすぐ下の砂は、かたまって飛び散る。

- もうちょいエネルギーを高くすると、二重のクレーター (端の影響)

クレーターサイズのスケーリング則 (5)

- Projectile kinetic energy vs 直径

$$D \propto v^{1.23/4}$$

クレーターサイズのスケーリング則 (6)

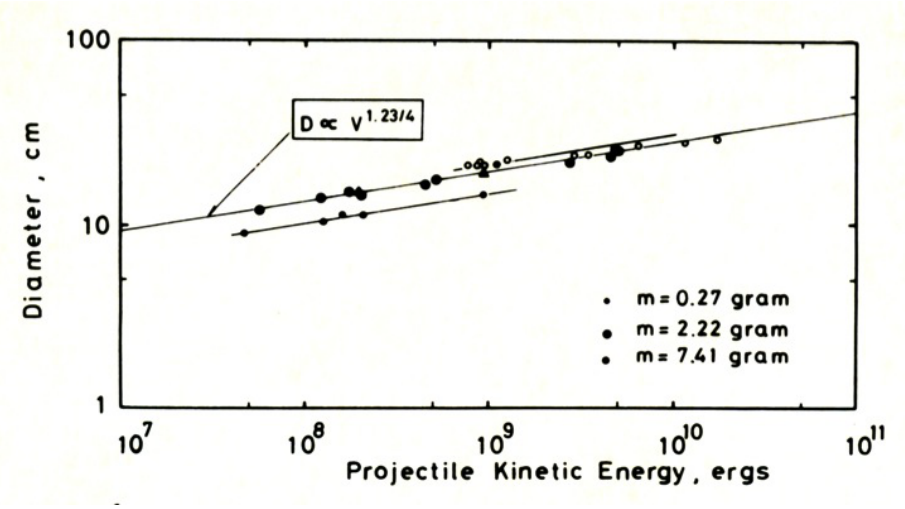
- Mizutani スケーリングの effective energy で表すと直径は、1/4 乗
- なぜ 1/4 乗？

- 砂は強度がない。そこにクレーターを作ると、でてくるものの質量は D の 3 乗
- 外にでるエネルギーは、D^4 乗に比例するだろう。衝撃波がもつエネルギー

→ 砂のデータは、説明可能。

クレーターサイズのスケーリング則 (7)

- 月のように固い場合は、この重力エネルギーに渡すエネルギーが必要だと想像できる。



- 強度のないターゲット物質にできるクレーター

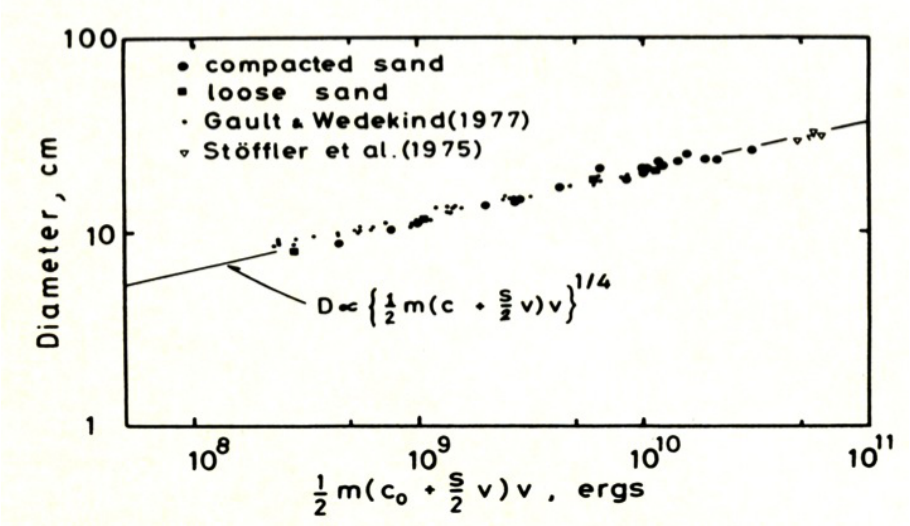
$$k_1 g D^4 = \frac{1}{2} m (C_0 + \frac{1}{2} sv) v$$

- 一般的なターゲット物質にできるクレーター

$$k_1 g D^4 + k_2 \epsilon D^3 = aI$$

クレーターサイズのスケーリング則 (8)

- Pi が衝突に必要なエネルギーに等しいと仮定すると、スケーリングができる。



- 速度が早い時と遅い時が式から振る舞いが分かる。

$$k_1 = \frac{\rho g \pi}{12 \times 16}\alpha^2(2+\alpha^2)$$

$$k_2 = \frac{\pi(3+\alpha^2)\alpha\rho}{6 \times 8}$$

$$D_1^* = \frac{k_2\epsilon}{k_1 g} = \frac{\alpha(3+\alpha^2)}{4\alpha^2(2+\alpha^2)}\frac{\epsilon}{g}$$

$$m\frac{C_0^2}{s}\left\{\left(\frac{v}{v^*}\right)+\left(\frac{v}{v^*}\right)^2\right\} = k_4\left\{\left(\frac{D}{D_1^*}\right)^3\left(\frac{D}{D_1^*}\right)^4\right\}$$

クレーターサイズのスケーリング則 (9)

- (破壊強度に関係) はサイズに依存。
- 大きいサンプルは、弱い。クラックの成長に起因。岩石学では知られていた。

$$\epsilon = \epsilon_0\left(\frac{D}{D_0}\right)^{-1/2}$$

$$I = k_4\left\{\left(\frac{D}{D_2^*}\right)^4 + \left(\frac{D}{D_2^*}\right)^{-5/2}\right\}$$

クレーターサイズのスケーリング則 (10)

- 衝突のエネルギーは、D の 4 乗と D の 5/2 乗の項で表せる。

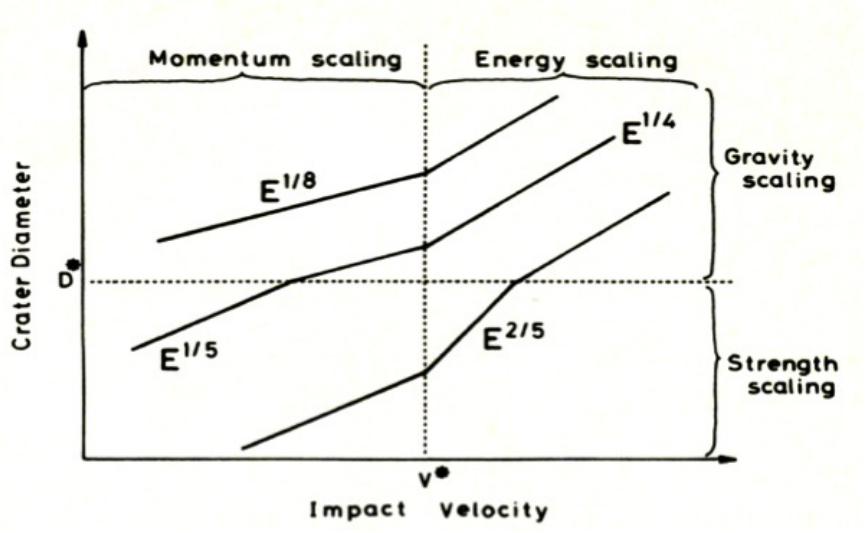
$$I = k_4\left\{\left(\frac{D}{D_2^*}\right)^4 + \left(\frac{D}{D_2^*}\right)^{-5/2}\right\}$$

$$D_2^* = \frac{k_2\epsilon}{k_1 g} = \frac{\alpha(3+\alpha^2)}{4\alpha^2(2+\alpha^2)}\frac{\epsilon}{g}$$

クレーターサイズのスケーリング則 (11)　エネルギーと直径の関係

- クレーターが大きいと重力、小さいと強度が支配的。
- 4 つの領域にわかれる。
- 実験は、その領域の境界を外挿しているので、注意が必要。

$$m\frac{C_0^2}{s}\left\{\left(\frac{v}{v^*}\right)+\left(\frac{v}{v^*}\right)^2\right\} = k_4\left\{\left(\frac{D}{D_2^*}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{D}{D_2^*}\right)^4\right\}$$



重力の効果 (1)

- 重力大の場合、gD^4 に比例。D は 1/4 乗に比例。実際は違う。
- この中にも g は関係するものがある。
- $C_0 + sv$ は、どのくらい圧縮されているか、なので、重力による。

$$k_1 g D^4 = \frac{1}{2}m(C_0+sv)v$$

$$D = k'\left\{\frac{m(C_0+sv)v}{2g}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{d\log D}{d\log g} == -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{d\log(C_0+sv)}{d\log g}$$

重力の効果 (2)

- 圧縮されている場合、$C_O + s_v$ はもともとショックウェーブ速度から、およそ 1/3。なので、-1/4 +1/4 ·1/3 = 1/6

実験的な経験式とよく一致。

$$P = \rho g \bar{h}$$

$$\frac{d\log(C_0 + sv)}{d\log P} = \frac{d\log U}{d\log P}\frac{1}{3}$$

$$\frac{d\log D}{d\log g} == -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

Q&A

質問： 砂の粒子のサイズは (実験で)？

答え： 0.1 mm くらい、そんなに細かくなく、粗くもない

質問： 吸着力は？

答え： ないと思う、さらさら。強度として、ϵ に入れられる。

質問： resistant force って何ですか？

答え： 力と変位の関係。その力は、摩擦と圧縮

質問： それをどう使っているのか？

答え： 音速として、C_0 が異なる。衝突速度とくらべてもあんまり変わらない。

質問： 空隙率が高いようなターゲットに対しては？

答え： 強度として, 入れられる。音速として。D_1^*(やわらかい or かたい) で表現。

質問： 現実の天体では確認できる？

答え： もともとのエネルギーがわからないから、わからない

質問： クレーター年代学について。月の LHB はどう思われるか？

答え： ピークのある方が面白いけど、その証拠は乏しい。古いほうが多いというのは悪く無いと思う。ピークの証拠がないよね。40 億年前にあったけど、その後は静かになったのではないかな。40 億年前の情報は消えちゃうのでは。

質問： スケーリングのメルティングの影響は？

答え： メルティングは入るけど、クレーターサイズを決める量にはならないと思う。壊すエネルギーの中に入れる。ϵ に入れる。

質問： コンパクトな砂の場合、実際にはどこ (クレーターの場所) を測ったのですか？W レイヤーのような構造をどう入れた？

答え： 直径の場所、周りの影響を受けないところ。W レイヤーはいれてない。コアの球の一部分と考えた。α で考えた。

質問： 今残されているクレーター科学の課題は？

答え： レイを予言できるか？クレーターの場合もできるはず。(イジェクタの相互作用で、クラスターを形成、レイになるって研究がある)

質問： レイの本数、長さとクレーターの大きさに関係は？

答え： あると思う

5 世界で最初の学会

惑星科学会は比較的に若い方の学会である。今からするお話は世界で最初の学会で、メルセンヌという人が始めたメルセンヌアカデミーというものです。これが世界で最初の学会であると広く認められている。

メルセンヌとはどういう人か

マラン・メルセンヌ (Marin Mersenne)：
16 世紀後半から 17 世紀半ば (1588/9/8–1648/9/1) のフランスのミニム会修道士。
直接、間接的に交流した人たちの中には、パスカル、トリチェリ、デカルト、フェルマー、ホイヘンスなどの当時の一流の科学者たちがいた。

メルセンヌ素数

Cogitata Physica-Mathematica(1644: 物理数学の省察) でメルセンヌは次の仮説を発表した。

$M_{\mathrm{n}} = 2^n - 1$ は $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ のときに素数になるが、それ以外の $n < 257$ の整数に対しては、合成数[*5]である。

しかし 1947 年、メルセンヌの仮説に間違いがあることが分かった。M_{67}, M_{257} は素数ではない。また、M_{61}, M_{89}, M_{107} は素数である。

[*5] 約数を持つ数

メルセンヌの言ったことは間違いであったが、面白いことではあった。ある数が素数か素数でないかを確かめるのは難しい。1 つ順番に割り算をして確認する必要がある。

現在では、発見された最も大きなメルセンヌ数は $M_{3021377}$ で 909526 桁の数である (19 歳の Roland Clarkson による。もちろん計算機を使用)。

メルセンヌ素数を探すのは計算的にも挑戦的

Donald B. Gillies (1928–1975) がスプートニク時代に計算機をつなげて使うアルゴリズムを開発し、その当時のスーパーコンピューター ILLIAC II を用いて、例題としてこのメルセンヌ素数 M_{11213} を発見した (1964)。イリノイ大学のコンピューターを使ったので、イリノイ大学の郵便局の消印には "$2^{11213} - 1$ is prime"が使われ, 現在でも使われている模様。

メルセンヌ素数と完全数との密接な関係

完全数とは、その数を除く約数の和がその数自身と同じになる数

例：6 (=1+2+3), 28 (=1+2+4+7+14)

M_n がメルセンヌ素数ならば、$2^{n-1}M_n$ は完全数である。

例：$2^1(2^2 - 1) = 6, 2^2(2^3 - 1) = 28$

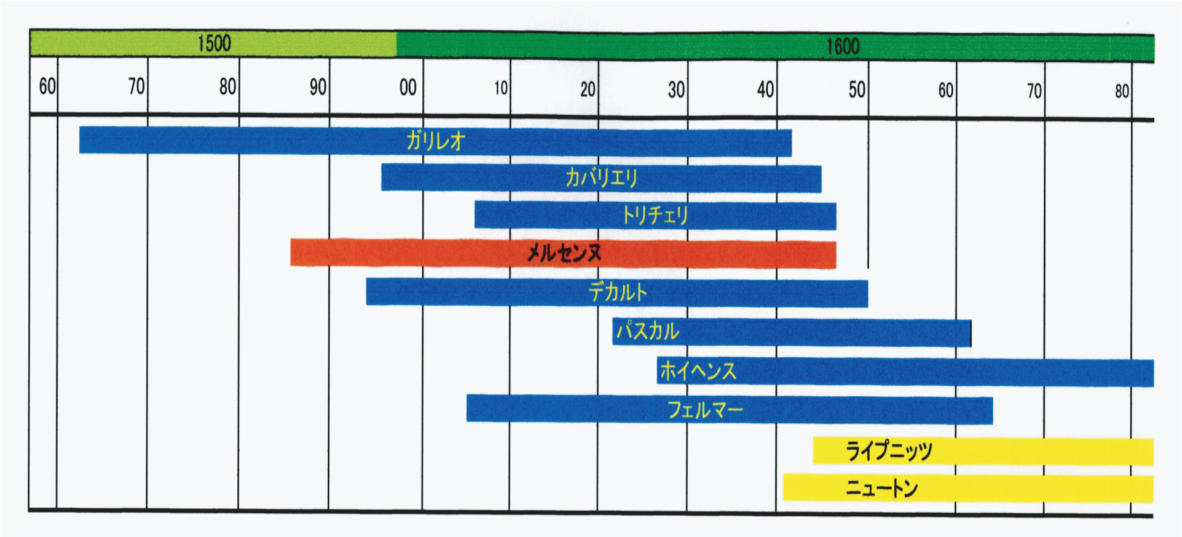
オイラーは偶数の全ての完全数はメルセンヌ素数に対応するものであることを証明した。

このように比較的面白い整数をメルセンヌは提案していた。

メルセンヌ・アカデミーの仲間

メルセンヌは 16 世紀後半から 17 世紀半ばまで生きた。ガリレオは 1642 年に没。ニュートンは 1642 年に生誕。ガリレオからニュートンの時代を生きた科学者たちが、メルセンヌと同時期に活躍した人々であった。メルセンヌはガリレオの研究をサポートし、ニュートンにつなげた。

メルセンヌ晩年の 1635 年にメルセンヌ・アカデミーを創設。科学者同士の交流をはかった。



メルセンヌの住んでいた場所

パリ東部、バスチーユ広場の近く、ミニム通り周辺に住んでいた。近くには王立広場 (現在はヴォージュ広場) があり王侯貴族が住んでいた。

ヴォージェ広場

この広場と館はアンリ 4 世によって、1650 年から 1612 年にかけて作られ、プラス・ロワイヤルと呼ばれていた。メルセンヌにとって、この広場は真新しいものであったに違いない。ミニム会の修道院もこの建設に伴って作られた可能性がある。フランス革命のあと、ヴォージュ広場と名前を変えた。それはフランス革命委員会に税金を最初に供出したヴォージュ県（Vosges：フランス北東部ロレーヌ地方にある）に敬意を表して命名されたものという事だ。

(今はしゃれたカフェ、洋品店がある。)

メルセンヌの庵室

メルセンヌは 1619 年からこの王立広場の近くのミニム通りにあるミニム会修道院に住んだ 。メルセンヌと同時代のイギリスの有名な哲学者トーマス・ホッブス（1588–1679）は、

> 彼の庵室はすべての学校よりも重要であった。メルセンヌの周囲には学芸の星々が、それぞれに彼を軸として軌道を回っていた。

と書いている。すなわち、メルセンヌはヨーロッパ全体の科学者の中心となって、

情報交換の役目を果たしたと言える。

ミニム会の経緯

ミニム会のミニムとは最小 (ミニマム) のこと。ミニム会はカトリックの一派。メルセンヌはミニム会の修道士であった。

フランチェスコ会

アッシジの聖フランチェスコによって創始されたカトリック教会の一派。
当時のカトリック教会は贅沢に流れて、本来のキリスト教の教えから離れていた。そんな中、アッシジに生まれたフランチェスコは、清貧をモットーに、12 人の弟子たちとともにイタリアの各地で宣教活動を行った。この 12 人の仲間はやがて「小さき兄弟の修道会」を名乗るようになり、ローマ教皇からも 1210 年にその活動が認められ、「フランチェスコ会（小さき兄弟の修道会)」が成立した。このフランチェスコ会はローマ教皇や各国の王族の庇護もあり、次第にイタリア、フランスのみならずヨーロッパ諸国で信者を増やしていった。
サンフランシスコは、スペインがアメリカに進出するときに一緒に行ったフランチェスコ会の修道士が「聖フランチェスコ (サン・フランシスコ)」にちなんで名をつけた街。また、サンフランシスコの中心にある教会、サン・フランシスコ・デ・アシスは、アッシジのサン・フランチェスコという意味。

もう 1 人のフランチェスコ

パオーラ（Paola)[*6]のフランチェスコと呼ばれる聖人で、アッシジのフランチェスコの誕生 (1182) からほぼ 230 年後の 1416 年に、南イタリアのパオーラ（Paola）に生まれた人物。
アッシジの聖フランチェスコが創立したフランチェスコ会も、創立から 200 年もたった頃には、初期の質素、清廉、禁欲の精神から遠ざかっていた。パオーラのフランチェスコは、アッシジのフランチェスコの目指した「小さな兄弟の会」をさらに徹底しようとし、**「もっとも小さな兄弟、ミニム」**会を創立した。

ミニム会はやがてカトリック教会の様々な会派のなかでも、各国の王侯によって支

[*6] パオーラは 南イタリアの代表的都市で、ナポリのさらに 200km ほど南にある小さな町。長靴型のイタリアのつま先部分にあたる。

持されるようになり、メルセンヌの時代にはフランスではもっとも有力なキリスト教の会派になっていった[*7]。

ライプニッツ

メルセンヌのもとに集まった一番最後の方にでてきた人がライプニッツである。1672 年ライプニッツはパリへ行き、そこでメルセンヌ・アカデミーの人々から刺激を受けた。その中でライプニッツの先生であるホイヘンスが彼に以下のような問題を与えた。

三角数の逆数の和を求めよ。

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots$$

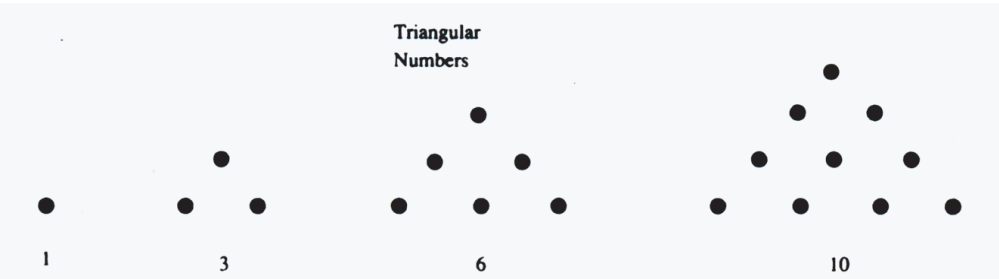
ライプニッツはこれを次のように解いた。

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \\ &= 1\end{aligned}$$

よって答えは 2 であると答えた。ホイヘンスもこれには感心したという。

三角数

以下のように三角形に並べた石の数



1, 3, 6, 10, 15, 21, ⋯

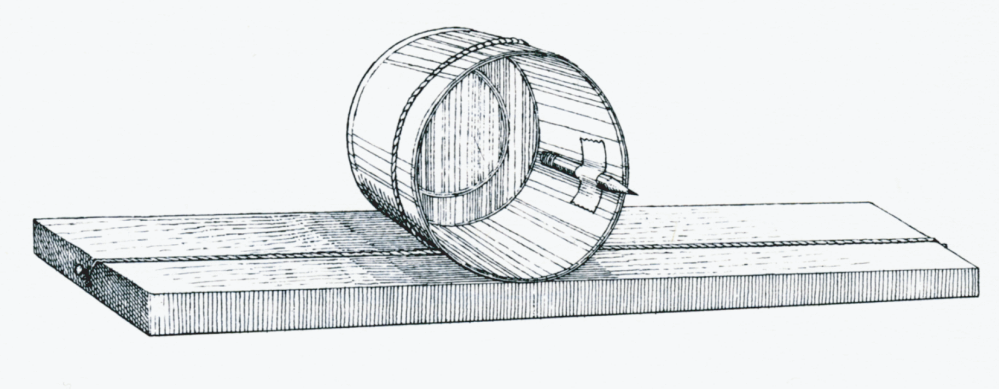
すなわち $A_n = A_{n-1} + n$ となっている数列

[*7] だから、メルセンヌのいたミニム会の庵も王宮広場の隣に作られたのだろう。

サイクロイドとは

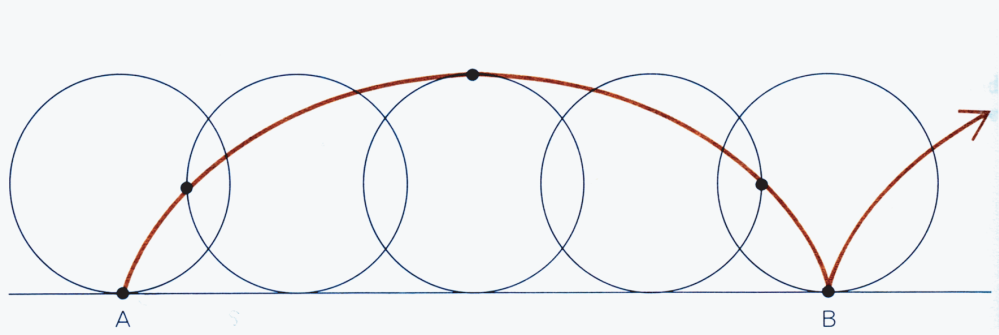
メルセンヌ・アカデミーでやった研究の中でわかりやすくて面白い話題の 1 つがサイクロイドという曲線である。

サイクロイドとは例えば桶やコーヒー缶に鉛筆をつけてこれを回転させたときに鉛筆の先が壁に描く曲線のこと。



サイクロイドの話

赤い曲線で示したものがサイクロイドである。



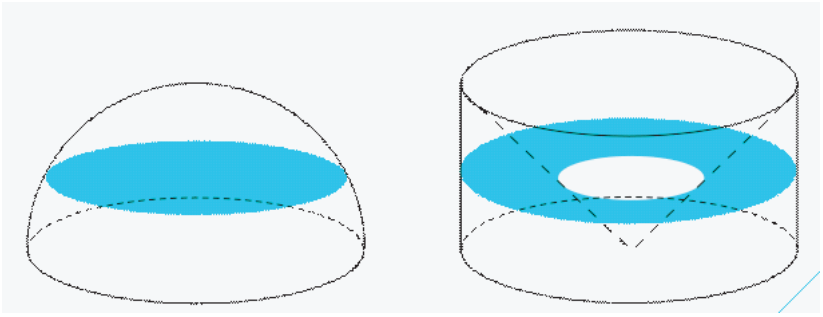
サイクロイドという名前はおそらくガリレオがつけたと思われる。1640 年にガリレオの忠実な弟子であったイタリアの数学者、カバリエリ（Francesco Bonaventura Cavalieri, 1598–1647）[*8]に宛てた手紙のなかに、「ガリレオはこの曲線について 50 年以上も考えつづけていた」と書いてあった。また、この曲線をギリシャ語の “円に近いもの”という意味で名づけたとある。つまり、サイクロイドはガリレオ時代からとても面白い曲線であることが気付かれていた。

[*8] ミラノのブレラ美術館にその大理石像がある。

カバリエリの定理

カバリエリ[*9]：イタリアのミラノ出身。

カバリエリの定理：切り口の面積が常に等しい 2 つの立体の体積は等しい。



- 例えば、左図の半径 r の半球の体積と、右図の半径 r, 高さ r の円柱から三角錐を切り抜いた体積を考える。
- 同じ高さの断面積 (水色の面積) は等しい。

体積を薄く切って算出する方法が微積分が発明される前に考え出されていた。この定理を唱えたカバリエリもメルセンヌアカデミーの一員。

サイクロイドに挑戦した人々

Galileo, Pascal, Torricelli, Decartes, Fermat, Christopher Wren[*10], John Wallis[*11], Huygens, Johann Bernoulli, Leibniz, Newton など。

[*9] ミラノのブレア美術館に図のようなカバリエリ像がおさめられている。
[*10] ニュートンと同時代の建築家。ニュートンにプリンキピアを書く事を勧めた人物。
[*11] 無限大 ∞ の記号を発明した人物

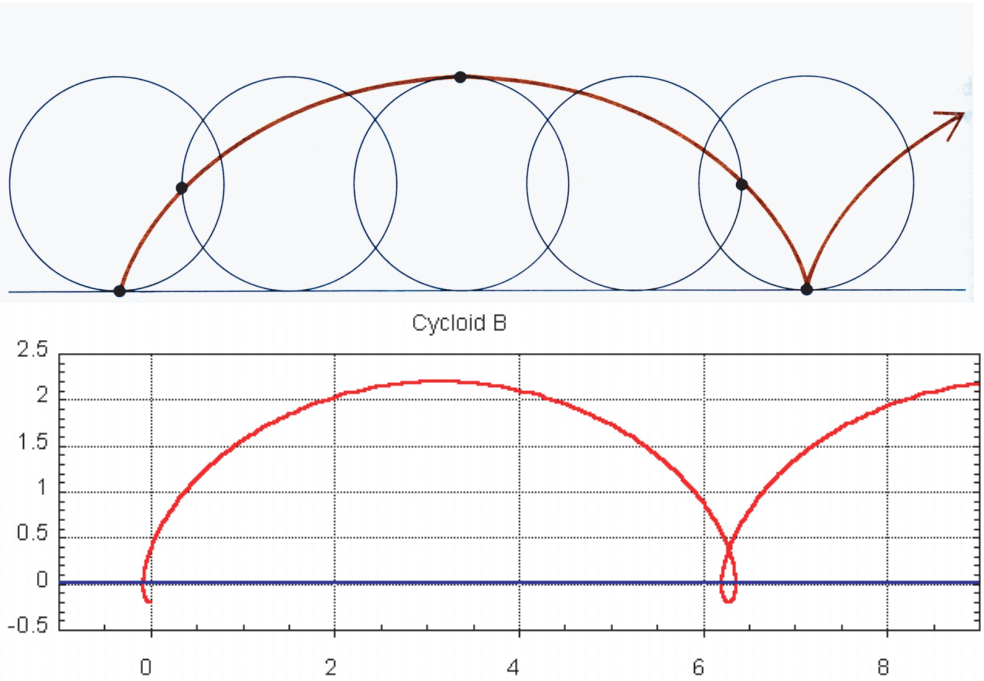
サイクロイドはその美しさから「幾何学のヘレン*12」と呼ばれている。

サイクロイドにまつわるパズル

東京から大阪に向けて走る新幹線の列車を考える。この車両の中で、一瞬だとしても静止している部分、あるいは大阪から東京の方向に逆向きに動いている部分はあるか？あるとするとどこか？

パズルの答え

等速運動で走る列車の車輪の動きはサイクロイドである。新幹線の車輪の端のある一点の軌跡に着目すると一瞬静止して、進行方向逆向きに進むことが見られる。



- 上図の円が転がる車輪を表している。時間は等間隔。
- はじめ地面と接している点が描く軌跡を表したのが赤線。
- はじめ地面との接点だったところが最高点に達した場所で速度は最速になる。
- はじめ地面との接点だったところが再び地面に接するときは速度 0 となり、一瞬静止する。

*12 ヘレンとはギリシャスパルタの王妃。絶世の美女だったと知られる。トロイの王子パリスと結婚し、トロイ滅亡の原因となった。

- 下図のように実際の車輪は線路 (青線) 直上にあるのではなく、はみ出した部分がある。
- 車輪の端の一点に着目して軌跡を描くと赤線のようになり、静止するとき、列車の進行方向とは逆向きに進むときがある。

サイクロイドは土木学的にも重要

サイクロイドの形は上からの力に対して最も強い構造である。
ガリレオはその強さから、サイクロイドに興味をもったそうである。

サイクロイドを眺めるパスカル

この彫像はルーブル博物館にある。

パスカルは若いときに数学の研究をしたり、気圧計や水圧計を発明したりしていた。ある時から、世俗のことから離れ、宗教的な思想をまとめることに没頭しようと決め*13、数学の世界から身をひいた。しかしある日ひどい歯痛に苦しめられ、その痛みを忘れるために、彼は数学の問題、サイクロイドについて研究したと言われ

*13 「パンセ」を書いた。

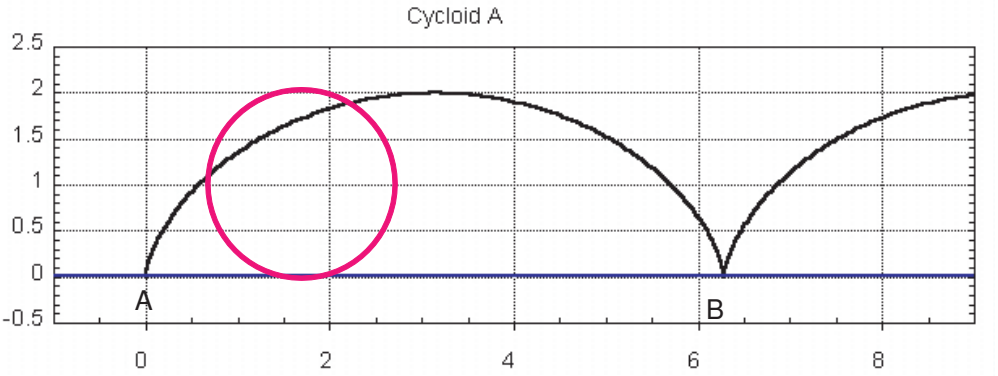
ている。

サイクロイドの幾何学

問い：サイクロイドの弧の長さは？

微分積分を習っていると解ける良い問題。とてもきれいな数になる。

AB 間の直線距離は円の直径の π 倍, ここでは 6.28.



答え：円の直径の 4 倍。 この図では長さ 8.

最初に正しい答えを与えたのは、イギリスの Wren(1658)

問い：サイクロイドの弧の下の面積は？

彼は円とサイクロイドの弧をそれぞれ紙に描き、それを切って両者の重さを測った。これから、ガリレオは π 倍と考えた。

答え：円の面積のちょうど 3 倍。 この図では 3π.

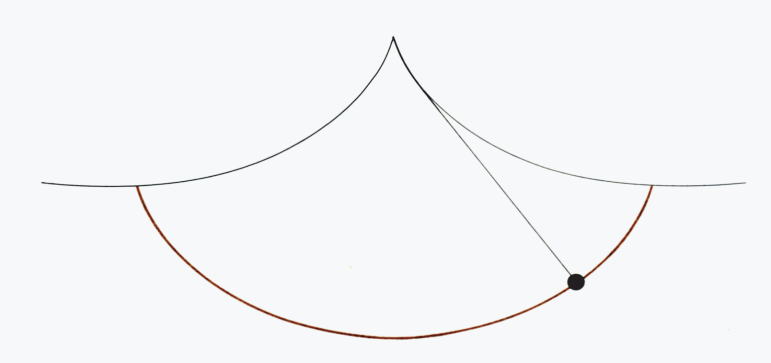
最初に正しい答えを与えたのは、フランスの数学者 Roberval またはイタリアの Torricelli[*14].

このように弧の長さは直径の 4 倍、弧の下の面積は円の面積のちょうど 3 倍、と非常にきれいな数になっているのが面白い。今では微分積分を習う高校生にとっては良い問題であるが、当時は最前線の人が一生懸命これを考えていた。

[*14] フランスの人々は Torricelli は Roberval の解答を盗んで発表したといい、逆にイタリアの人々は Roberval が Torricelli の解答を盗んだといっていて決着つかない。しかし、どうやら Roberval が先のようである

サイクロイドの力学

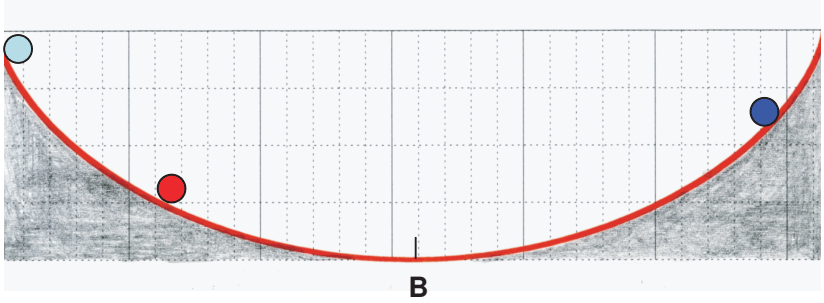
オランダの物理学者ホイヘンス (1673) はサイクロイドの等時性を示した。
振り子の等時性はよく知られているが、本当は振り子の等時性が成り立つのは、その振幅が小さいときだけである。大振幅の振り子でも等時性をもたらすには、振り子の揺れに図のようなサイクロイドの制限を加えると良い。



- 黒い曲線がサイクロイドの一部。
- 支点をサイクロイドの不連続点において、振り子を振る。
- サイクロイドに沿ってひもは拘束を受ける。
- ひもの先端のおもりの運動曲線もサイクロイドになる。この曲線をインボリュートと呼ぶ。

これはサイクロイドの面白い性質の一つである。
ホイヘンスはこれを元に世界で初のフレキシブル振り子の時計を作った。実際に作ってみると拘束部分で摩擦があるので、振幅がだんだん小さくなった。結局実用にはならなかった。

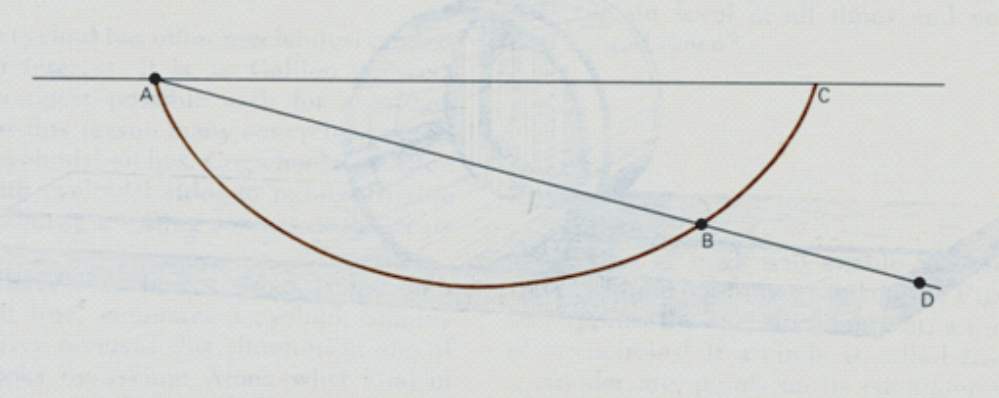
問い：サイクロイドの形をしたお盆の中でどのボールが一番先に底 B に到達するか？



答え：同時刻に点 B に到達する。

最速降下線

問い：A と B を結ぶ線のなかで、重力を受けてもっとも球が早く到達できる道筋はどれか？



答え：サイクロイドの道筋。直線 AB の坂を転がるよりも、サイクロイドに沿い一回下がって上がる道筋の方が早い。
このサイクロイドの道筋を最速降下線と呼ぶ。

Q: よく見る最速降下線は一番下までの道筋で、残りの部分が入ってないのですが、残りの部分が入っても変わらないのですか。
A: 残りの部分が入っても速い。ここで見たように AB の直線を通るよりも一回勢い良く降りて上がるサイクロイド曲線の方が速い。

Q: 地震波の走時をとったときのパスというのもこのサイクロイドと同じですか。
A: 地震波はどうかな。違うと思う。地震波は層構造があって屈折して上がってくるから、この原理とは全然違うような気がする。

このように、サイクロイドがとても面白い性質を持っていることが分かる。
このような「こういった面白い性質がありますよ」、ということをみんなで議論しあってサイクロイドについての研究を広めていったのがメルセンヌアカデミーの 1 つの役割であった。

まとめメルセンヌという人は科学者の集団の連絡係みたいなものであった。当時はメールが無いからメルセンヌ経由でやりとりしていた。メルセンヌは中立的な立場で悪口なども連絡として本人に伝えている。それでお互いに刺激をしあっていた。

科学者の集まりは有益であることを最初に示したのはメルセンヌだった。メルセンヌ・アカデミーは後にフランス科学院となった。我々も学会やセミナーで活発な意見交換をして、学問を楽しむべきであろう。
惑星科学会も悪口でもなんでも言いながら刺激をしあうと、アカデミーとしての役割を果たすことができるだろうと思う。

Q and A

Q: メルセンヌ・アカデミーはフランスの中で閉じたものではなかったのか？
A: 閉じたものではなかった。ヨーロッパ全体をおおっていた。

Q: ニュートンとライプニッツの対立のときはどうなっていたのか？
A: ニュートンとライプニッツの対立にメルセンヌは加わっていない。もうメルセンヌはそのとき死んでいた。

Q: ニュートンとライプニッツの対立とは何か？
A: どちらが微分積分学を発明したかということ。フランスなど大陸側の人々はライプニッツだと言い張り、島に住んでるイギリスの人々はもちろんニュートンが考えたものだと言い張っていた。長いことこの論争はあり、今でも決着はついていないといえる。ただ言えるのは、記号はライプニッツの記号を現在我々は使っている。

Q: ニュートンの方が先に書いていたということは聞いたことがあるが？
A: 先に知っていたかもしれない。たぶん使っていたのは使っていたんだろうと思う。だけどそれを発表はしていない。「プリンキピア」には微分積分はでてこない。幾何学的に答えをだしている。微分積分をどこに使っているかな、と僕は一生懸命探したが、「プリンキピア」そのものには出ていない。どちらにしてもその当時の人々は偉くて素晴らしい考えをしていた。

Q: 学会誌に相当するようなものはあったんですか？

A: 学会誌というものはまだこの頃はなかったみたいだね。だから全て個人的な手紙のやり取りであった。手紙が全部保存されているとうれしんだけど、もう散逸しちゃってるからね。

Q: どうやってメルセンヌさんはこれを始めたのですか？
A: メルセンヌ自身は神様の存在を科学で証明したかったんだと思う。だから神様の教えをみなさんに広げるのに役立つと思っていて、いろんな科学者とつきあった。そのうち科学者同士の輪が広がっていってこういうアカデミーという形になったんだと思います。

Q: そういう意味ではメルセンヌさんが死んだあと、どのように維持されていったのですか？
A: 死んだあとは一時この活動はなくなった。今度は本人同士の手紙のやりとりになった。情報を交換することはどうしても必要だったんだろうな。手紙を出すのはその頃むちゃくちゃ時間はかかったろうけどね。で返事が返ってくるかどうかも分からないからね。それに比べれば我々の情報伝達速度は、むちゃくちゃ速いはずだ。学問の進歩もそれに比例して速くならなくちゃいかんかもしれない。頭の方がおいつかんかな (笑)。

Q: 濃度が薄くなっちゃいそう。読まないといけない論文ばっかりになってしまう (笑)。
A: そうだな。だから読まなくちゃいけない論文の数を減らす方法を考えなくちゃいけないね。淘汰しないとね。誰かが淘汰してくれると本当はいいんだけど。