

特集「日本における衝突研究の軌跡」

SPH法による衝突数値計算

玄田 英典¹

2015年4月30日受領, 査読を経て2015年6月16日受理.

(要旨) 天体衝突は、惑星形成および進化過程において頻繁に起こる基本的なプロセスであり、衝突現象の理解は、惑星科学において本質的に重要である。衝突数値計算は、衝突実験を行うことが困難な設定や、衝突実験の結果を深く理解する手段として有用である。本稿では、惑星科学における様々な衝突現象の数値計算によく用いられるSPH法(Smoothed Particle Hydrodynamics)について解説をする。SPH法は流体を多数の粒子に分割し、流体の運動を数値的に解く手法である。ここでは、SPH法の歴史、SPH法の基本概念と長所・短所、そしてSPH法を用いた惑星科学における衝突数値計算の応用例について解説する。

1. はじめに

惑星は様々なサイズ(μm ~1000 km)の天体衝突を経て形成されたと考えられている。惑星形成後も、天体衝突は頻繁に起こっている。例えば、2013年ロシアのチェリャビンスク州の隕石落下[1]が記憶に新しい。また、6500万年前に恐竜を絶滅させたといわれる隕石衝突[2]や、月表面の無数のクレーター[3]は、惑星形成後も天体衝突が頻繁に起こったことを示唆している。したがって、衝突によって何が起こるのかを理解することは、惑星科学の諸問題を考える上で非常に重要となってくる。

衝突現象を理解する手段として、大きく分けて実験的手法と数値計算的手法がある。これら2つの手法は互いに相補的な関係にあり、衝突現象を深く理解するためには、お互いに重要である。近年、衝突実験においては、惑星科学の諸問題で必要とされる衝突速度(~10 km/s)を達成できるようになり、高感度のハイスピードカメラを用いた観察により、衝突の素過程がリアルタイムにわかるようになってきた。また、数値計算においては、近年の計算機パワーの向上と様々な計算手法の開発・改良により、現実的な物理を含んだ3次元の衝突計算を高解像度で実行することが可能とな

ってきた。このことにより、様々な物理量を実験と数値計算で比較ができるようになってきている。今後ますます、これらの関係性は密になっていくと思われる。

本稿では、数値計算に焦点をあて、特にSPH法と呼ばれる計算手法について解説する。次節では、SPH法に関する簡単な歴史を述べ、3節では、SPH法の基本概念と実際に計算コードを書くときに必要となってくる式の導出を行う。手法自体にあまり興味のない読者は3節を呼び飛ばしてもその後の節が理解できるよう書かれている。4節では、SPH法の長所と短所をまとめた。5節では、実際にSPH法を用いた惑星科学における天体衝突の研究例を著者の最近の研究を交えて紹介する。実験的手法に関しては、本特集号の他の記事を参考にしてほしい。また、数値計算手法に関してもDEMを用いた研究に関しては本特集号の和田氏の記事[4]を参考にしてほしい。

2. SPH法の歴史

計算領域内に真空の領域が多く、また物質が大きく変形や移動をするような場合は、計算領域内に格子を張って物質の流れを格子上で計算するよりも、物質を要素に分割して、物質の流れをその要素に沿って計算した方が有利なことがある。前者はオイラー的手法、後者はラグランジュ的手法と呼ばれている。SPH法は、

1. 東京工業大学 地球生命研究所
genda@elsi.jp

ラグランジュ的手法の1つであり、物質を粒子に分割し粒子間の相互作用(例えば、圧力による粒子間の反発)を数値的に解く手法である。

SPH法は、1970年代にルーシー(L. B. Lucy)によって開発され、モナハン(J. J. Monaghan)らのグループによって势力的に改良が施され発展したとされている¹。SPH法という用語が初めて登場したのは1977年である[6]。SPH法は天文学の分野で開発されたが、その後、惑星科学の分野では、ベンツ(W. Benz)やキャメロン(A. G. W. Cameron)らが、SPH法を用いた巨大天体衝突の計算を行い、月の起源の仮説の1つとして挙げられていたジャイアントインパクト仮説が非常に有力な仮説であることを示した[7]。さらにその後、弾塑性変形・破壊モデルが組み込まれた計算コードが開発され[8]、実際に実験室で起こっている衝突現象を再現もしくは比較できるような段階にまで発展した。

SPH法は、天文学・惑星科学だけでなく、その汎用性の高さから、工学、地学(火山学、海洋学など)などの様々な分野でも用いられるようになった。例えば、Google Scholarで論文検索をすると、SPHもしくは“Smoothed Particle Hydrodynamics”が論文タイトルに含まれているものだけで約5000件ヒットする。

日本で最初にSPH法を用いて研究を行ったのは観山正見氏(元：国立天文台長)とされている²。分子雲の崩壊・分裂の計算に応用された[9]。日本の惑星科学の分野で最初にSPH法を用いて研究を行ったのは渡邊誠一郎氏(現：名古屋大学)とされている。微惑星同士の衝突と潮汐相互作用の計算を行った[10]。また、高田淑子氏(現：宮城教育大学)は、SPH法を用いてシューメーカー・レヴィ第9彗星の木星への衝突計算を行った[11]。

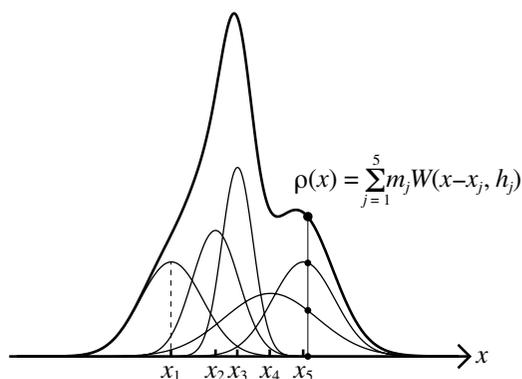


図1：SPH法の基本概念を模式的に表した図。ある任意の場所での物理量(例えば密度)は、ある広がりをもった粒子の重ね合わせとして表現される。図は空間が1次元の場合で、物理量として密度を想定している。各粒子の中心座標は x_j ($j=1\sim 5$)にあり、それぞれ異なったスムージング長 h_j を持っているとしている。太線が流体の密度分布 $\rho(x)$ を表している。 W はカーネル関数で、各粒子中心からの距離と、各粒子のスムージング長の関数である。

3. SPH法について

ここでは、広く使用されている標準的なSPH法(標準SPHと呼ぶ)の基本概念を解説し、流体の基礎方程式をSPH法の基本概念を用いて展開していき、実際に計算コードを作成するのに必要となってくる式の導出を行う。

3.1 SPH法の基本概念

SPH法では、流体を多数の粒子に分割し、粒子間の相互作用を計算することによって、粒子の運動を数値的に解いていく。SPH法においてもっとも重要な概念は、ある物理量(例えば密度)が各粒子の中心からある特徴的な長さをもって広がっており、空間の任意の場所の物理量(例えば密度)が各粒子の足しあわせで表現されるという点である(図1参照)。各粒子が持っている質量を m_j とした時(下付き添え字 j は粒子のラベルであり、 m_j は j 粒子の質量である)、空間のある任意の場所での密度(ρ)は、以下のように表現される。

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_j m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h). \quad (1)$$

ここで \mathbf{x} は空間座標、 W はカーネル関数と呼ばれ、空間座標 \mathbf{x} と特徴的な広がりを表すスムージング長 h の関数である。カーネル関数は以下の条件を満たす滑ら

1. SPH法の基本概念と式の展開が論文として発表されたのは1977年で、ほぼ同時期にLucy(1977)[5]とGingold and Monaghan(1977)[6]の2本の論文が発表されている。投稿日と出版日はGingold and Monaghan(1977)の方が先だが、ルーシーはそれ以前に、集中講義でSPH法の基本概念に関する講義をしていたとされている。モナハンはその講義からヒントを得て論文を書いたとされている。

2. 著者は東工大の地球惑星科学専攻でポスドクとして井田研究室に所属していた頃、年1回の教室発表会と呼ばれる専攻のイベントでポスター発表をしたことがある。そのとき、外部評価委員として来られていた観山氏が著者のポスターを見に来たことがあった。著者はそのとき、観山氏が日本で初めてSPH法を用いた方だと知らずに、SPH法の説明を観山氏にしたことがある。あとで当時の某ポスに怒られた。

かな関数であれば良い。

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}, h) = 0, \quad \int W(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x}^3 = 1. \quad (2)$$

カーネル関数としてガウス関数やスプライン関数がよく使われる。ここでは、以下のガウス関数を用いて話を進めることとする。

$$W(\mathbf{x}, h) = \left[\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \right]^d e^{-x^2/h^2}. \quad (3)$$

ここで、 d は空間の次元である。次節で、流体の基礎方程式をSPH法の基礎概念を用いて展開する際、カーネル関数の空間微分が出てくるが、式(3)で与えられた関数の空間微分は以下のように解析的に求まる。

$$\nabla W(\mathbf{x}, h) = -\frac{2\mathbf{x}}{h^2} W(\mathbf{x}, h). \quad (4)$$

スムージング長 h に関しては、固定値を用いる場合と、各粒子ごとかつ時刻ごとに可変の値を用いる場合がある。可変 h を採用した場合、 h の値を実際にどのように決めるのかについては幾つかのやり方があるが、よく使われている方法としては、 h の範囲内に存在する粒子の数を一定にするように h の大きさを調節するという方法である。可変 h を用いた場合、各計算ステップにおいて各粒子の h を再計算する必要があるため計算コストは多少かかる。しかし、粒子が密集した高密度領域では解像度が高くなり、低密度領域でも流体の運動をそれなりに捉えることができるため、最近のシミュレーションでは可変 h を用いるのが一般的である。

密度以外の物理量 f (例えば、圧力や速度など)の空間分布は、各粒子の中心位置における密度 $\rho_j (= \rho(\mathbf{x}_j))$ と f を用いて以下のように表現する。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h). \quad (5)$$

また、物理量 f の空間微分は、以下の式で与えられる。

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h). \quad (6)$$

以上、式(1)と式(5)がSPH法においてもっとも重要な基本概念を表す式であり、物理量の空間微分が式(6)で与えられることによって、これから述べる流体運動の基礎方程式が粒子の相互作用として記述することが可能となる。

3.2 流体運動の基礎方程式

ここでは簡単のために、圧縮性理想流体を考える。ラグランジュの描像における流体の基礎方程式³⁾は、以下のように与えられる。

$$\text{(連続の式)} \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (7)$$

$$\text{(運動方程式)} \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (8)$$

$$\text{(エネルギー方程式)} \quad \frac{Du}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (9)$$

ここで、 D/Dt はラグランジュ微分、 t は時間、 \mathbf{v} は速度ベクトル、 p は圧力、 u は単位質量あたりの内部エネルギーをあらわす。

式(6)を用いて、基礎方程式の右辺を表現することを試みる。まず運動方程式を考える。式(6)の物理量 f が圧力 p であるとすると、 i 粒子の運動方程式(8)は以下のように書ける。

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \frac{p_j}{\rho_i \rho_j} \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h). \quad (10)$$

ただし、この形式だと、 i 粒子が j 粒子に及ぼす圧力勾配による力と、 j 粒子が i 粒子に及ぼす圧力勾配の力が異なってしまい、作用反作用の法則が破れてしまう。そこで、式(8)の右辺をひとまず

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (11)$$

と変形してから、式(6)を適用すると、 i 粒子の運動方程式は、

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h). \quad (12)$$

となり、作用反作用の法則が成り立つ。

エネルギー方程式(9)に関しても、 $\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$ の変形を施したのちに、式(6)を適用することによって i 粒子のエネルギー方程式は以下のように書くことができる。

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h). \quad (13)$$

i 粒子の密度の時間変化を与える連続の式(7)を運動方程式やエネルギー方程式で行ってきたように定式化

3. 基礎方程式の導出に関しては各種流体力学の教科書に載っている。圧縮性流体力学に関して特に著者が勉強になった日本語の教科書としては、「圧縮性流体力学(松尾一泰著・理工学社)」と「宇宙流体力学(坂下志郎, 池内了共著・培風館)」である。

することは可能であるが、通常は式(1)を次のようにして用いることが一般的である。

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h). \quad (14)$$

i 粒子の中心座標の移動は、以下の式によって求める。

$$\frac{D\mathbf{x}_i}{Dt} = \mathbf{v}_i. \quad (15)$$

基礎方程式をどのように展開していくかによって、標準SPH法の中でも何種類かの形式が提案されている。問題に応じてどの形式のものを使うのか選択する必要がある。

ここで一度、計算コードを作成する立場で整理してみる。ある任意の時刻(n ステップ目とする)で、全粒子の質量、位置、速度、密度、内部エネルギー、圧力がわかっているとす。 $n+1$ ステップ目の i 粒子の物理量は、時間1次精度の前進差分法を用いると次のように書ける。

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \times \mathbf{v}_i^n, \quad (16)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \Delta t \times \sum_j m_j \left(\frac{p_i^n}{\rho_i^{n2}} + \frac{p_j^n}{\rho_j^{n2}} \right) \nabla W(\mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_j^n, h), \quad (17)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \times \frac{p_i^n}{\rho_i^{n2}} \sum_j m_j (\mathbf{v}_i^n - \mathbf{v}_j^n) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_j^n, h). \quad (18)$$

ここで上付き添え字 n および $n+1$ はステップ数、 Δt は時間刻み幅をあらわす。ここでは各粒子のもつ質量は時間変化しないとした。

式(16)~(18)から、 $n+1$ ステップ目の全粒子の位置、速度、内部エネルギーが求まる。 $n+1$ ステップ目の密度については、式(14)の右辺に、 $n+1$ ステップ目の粒子の位置を用いて求める。あとは、 $n+1$ ステップ目の圧力が計算できれば、 $n+2, n+3, \dots$ と帰納法的に計算することが可能となる。 $n+1$ ステップ目の圧力を計算するためには、状態方程式が必要である。状態方程式が与えられれば、 $n+1$ ステップ目の密度と内部エネルギーから $n+1$ ステップ目の圧力が求まる。

したがって、計算の初期条件として、全粒子の質量、位置、速度、内部エネルギーが与えられれば(初期密度は、式(14)から計算する)、流体のその後の運動は計算できることとなる。非常に簡単な手法である(と思う)。

実際に計算コードを組む際には、時間積分に2次の

精度をもたせたり、 h を可変にしたり、時間刻み幅 Δt を効率よく決めるための工夫が必要である。

また、流体の運動に衝撃波がともなう場合には、運動方程式とエネルギー方程式に人工粘性を加えるなどの工夫も必要である[e.g., 12].

3.3 状態方程式⁴

SPH法に限らず、一般的に流体の運動を解くためには、状態方程式が必要である。状態方程式とは、熱力学において状態量の間の関係を与える式である。もっとも有名な状態方程式は、理想気体の状態方程式である。

$$p = (\gamma - 1)\rho u. \quad (19)$$

ここで γ は比熱比をあらわし、単原子分の場合は5/3、二原子分子の場合は7/5の値をとる。状態量として何を用いるかによって状態方程式の表現形式が異なってくる。式(19)においては、密度と内部エネルギーが与えられれば、圧力が求まる形式になっており、流体の基礎方程式との相性がとても良い。天文学の諸問題においては、理想気体の状態方程式で事足りることが多いが、惑星科学の諸問題においては、実際の物質(例えば、岩石、鉄、氷など)を模擬した状態方程式を用いなければ、実際の現象を再現することが難しい場合が多い。例えば、気体は圧力をかけると体積が容易に変化するが、固体の場合、圧力をかけても体積はほんの少ししか変化しない。このような違いを取り扱うことが、惑星科学における天体衝突現象の理解には非常に重要となってくる。

惑星科学における天体衝突計算では、Tillotson状態方程式[13]とANEOS [14]と呼ばれる状態方程式がよく使われる。Tillotson状態方程式は、10個のパラメータを含んだ2つの式で定式化されており、密度と内部エネルギーから圧力を計算することができる。パラメータの値は、衝撃波実験や高温高圧実験などで得られたデータに合うように設定されており、水、氷、花崗岩、玄武岩、鉄、アルミニウムなど惑星科学で用いられる多くの物質に対してパラメータの値が定まっ

4. 著者がまだ修士の大学院生だった頃、某指導教官に「君は何種類の状態方程式を知っているのかね?」と質問され、「理想気体、ファンデルワールス、Tillotson, ANEOS, ...」と答え、そのあとが出てこなくて、苦し紛れに「水の状態方程式、岩石の状態方程式、鉄の状態方程式、...」と続けたら、ふざけると言われて怒られたことがある。

いる。この状態方程式は、固体(液体)の状態および蒸発を伴うような変化もある程度正しく再現することができる。ただし、Tillotson状態方程式だけから温度や蒸発率を正しく求めることは難しい。

Tillotson状態方程式が、実験データに合うように半解析的に求められた状態方程式であるのに対して、ANEOSの状態方程式は、熱力学の第一原理から状態を計算する状態方程式である。ANEOSはFORTRANというプログラミング言語で書かれた約3000行のプログラムで、入力パラメータの数は約40個ある。すべての入力パラメータが実験的に正しくもとまっているわけではないが、何種類かの物質については、ある程度、物質の相図を再現している。熱力学的に状態を求めているので、温度や蒸発率などの様々な状態量を矛盾なく求めることができる。実際によく使われている物質としては、シリカ、フォステライト、鉄などがある。最近では、単原子分子の気体状態しか表現できなかったANEOSは改良され、多原子分子の気体状態でも扱えるM-ANEOS⁵ [15]が、最近のシミュレーションではよく使われるようになってきている。

その他に、H₂Oの状態を非常に正しく与えてくれる5-phase EOS [16]や、ロス・アラモス研究所が提供するSESAMIという状態方程式などが惑星科学における天体衝突計算に使われている。

3.4 様々な物理

これで一応は圧縮性理想流体の運動を数値的に解くことができるようになった。その後は、適宜、扱う問題によって、様々な物理を基本方程式に組み込んでいけば良い。例えば、天体衝突の規模が大きい場合、天体の自己重力が重要となってくる。その場合、運動方程式(12)の右辺に自己重力の項を追加すれば良い。放射などで温度が下がっていくことを模擬したければ、エネルギー方程式(13)の右辺に放射冷却の項を追加すればよい。もちろん、これらの追加項を計算機上で効率良く計算するためにはある程度の熟練したプログラミングスキルが必要ではある。

また、惑星科学における衝突問題において、物質は弾性的もしくは塑性的に振る舞う場合が多い。その際

は、圧力の代わりに応力テンソルを用いて運動方程式を定式化する必要がある[8]。また物質の脆性を模擬したければ、適宜破壊モデルを導入する必要がある[8]。さらに、最近では、空隙を考慮したSPH法[17]や、摩擦を考慮したSPH法[18]なども開発されている。

4. SPH法の長所と短所

ありとあらゆる問題に適した完全な流体数値計算法というものは存在しない。それぞれの計算法には長所と短所がある。問題の本質を見極めて、適宜その問題に適した手法を用いることが最善の策である。SPH法以外にも、様々な計算手法が惑星科学における衝突数値計算に用いられている。例えば、DEM [4]、iSALE [19, 20]、SOVA [21]、ZEUS-MP2 [22]、CTH [23]などが挙げられる。

以下にSPH法の長所についてまとめる。

〈長所〉

- (1) アルゴリズムが簡単であること。
- (2) 本質的に3次元計算向きの計算手法であること。
- (3) 真空領域が広い場合でも計算コストが余分にかからない。
- (4) 物質が大変形するような場合を得意とする。
- (5) 高密度な部分は多くの粒子が密集しているので、高精度となる。
- (6) 境界条件に特別な配慮をする必要がない
- (7) 2種類以上の物質を容易に扱うことができる。

SPH法を用いた計算コードの主要部分はおよそ300行程度で記述できる。簡単な計算であれば、SPH法の勉強をゼロから始めて、計算コードを自作し、実際に計算を走らせるまでに2週間程度あれば、それっぽい結果を得ることができる(長所1)。SPH法が簡単である理由の一つに、他の手法と比べて、1~2次元のコードから3次元のコードに拡張する際、困難がほとんどないことが挙げられる(長所2)。

惑星科学における天体衝突の問題によっては、計算領域の大部分に物質がなく真空である場合がある。その場合、オイラー的手法では、その真空領域も格子を張り巡らせる必要があり計算コストがかかる。一方、SPH法では粒子が存在しない部分はそもそも計算する必要がない(長所3)。また、衝突天体が宇宙空間を高速で移動し、衝突によってイジェクタが激しく飛び

5. M-ANEOSのMは、分子を扱うことができるようになったことから、moleculeの頭文字を用いたとされているが、一説によると、開発者のメローシュ(H. J. Melosh)のMをとったものであるとも言われているが、怖くて本人の確認はとっていない。

散ったりするような場合、オイラー的手法では空間に張られた格子間を大量に物体が横切ようになるため、数値的な拡散が大きくなってしまいます。その点、粒子に沿って運動を解くSPH法は有利と言える(長所4)。また、天体が回転しているような場合も、粒子間の相対速度は小さいので、角運動の保存性が良い(または完全に保存する)。さらに、SPH法では陽に計算領域を設定する必要はない。粒子が存在している領域が計算領域である。したがって、オイラー的手法のように、計算の境界条件にあまり神経質になる必要がない(長所6)。

惑星科学においては、2種類以上の物質を1回の計算で用いる場合がある。例えば、月を形成したと考えられている巨大天体衝突では、マントルとコアで状態方程式が異なり、これらの物質の違いを考慮することが重要となってくる。オイラー的手法では、物質境界がどのように移動していくかなどの特別な配慮が必要であるが、SPH法では粒子毎に異なる状態方程式を用いばよいため、別段配慮は必要となっていない(長所7)。

次にSPH法の短所について述べる。

〈短所〉

- (1) 数値不安定性が少なく、計算が破綻しにくい。
- (2) 低密度な部分は粒子が少ないため、計算の精度が悪い。
- (3) 密度ゆらぎが内在する。
- (4) 他の手法と比べて計算コストがやや高い。
- (5) 初期値の設定にやや苦勞する。
- (6) 物理的境界条件(例えば壁など)を与えるのに工夫がいる。
- (7) 軸対称の座標系での計算に不向きである。

SPH法では、式(1)に代表されるように、物理量の足しあわせ(もしくは平均化)が随所で行われているため、計算コードは非常に数値的に安定している。そのため、実際に計算を走らせると、途中で計算が破綻することはあまりなく、とりあえず何かしらの結果が出てくる。このことは一見長所に見えるが、注意が必要である。計算が破綻しにくいということは、計算が間違っていることを計算機が教えてくれない。他の手法では、計算コードにバグがあると、大抵の場合、計算が途中で破綻し計算が止まる。したがって、このことはSPH法の短所であると考えべきである(短所1)。

さらに、SPH法は、物理的に起こると予測される不安定性さえも抑えてしまうことがあるので、不安定性が重要となってくる問題には不向きである。

SPH法は高密度な部分は高精度になるが(長所5)、低密度な部分は低解像度となる(短所2)。したがって、低密度領域が重要となってくる問題(例えば電磁場など、場の量を問題とする場合)では短所である。また、SPH法では、近傍粒子の寄与(例えば100個とか)で密度が決定されるため、密度ゆらぎが内在する(短所3)。密度のゆらぎが重要となってくる問題、例えば、原始惑星系円盤内の密度波を調べるなどの問題には特別な注意が必要である。

SPH法は、他の一般的な計算手法と比べると計算コストがやや高い傾向にある(短所4)。例えば、一般的なオイラー法の場合、1つの格子点に対して隣接する格子点の数(計算スキームによるが3次元計算の場合、大抵10点以下)だけ考慮して計算すれば良いが、SPH法の3次元計算の場合、1粒子あたり50~100個の近傍粒子との相互作用を計算しなければならない。また、粒子の配置も時事刻々と変わるので、粒子間距離の計算も毎計算ステップで行わなければならない。さらに、SPH法の粒子1個が、オイラー法の格子点1個に対応する解像度を持っているかということ、必ずしもそうではない。特に衝撃波面のような不連続面では、物理量の平均化(式(5)と(6))によって衝撃波面をスムージング長 h 以下で表現することは困難である。標準SPH法では、衝撃波面はおおよそ5粒子程度の厚み(約 $2h$ に相当)を持ってしまふことが知られている。一方、精度の良いオイラー法では、1~3格子程度で衝撃波面を捉えることができる。したがって、問題によっては、オイラー法と同等の解像度を得るためには、オイラー法の格子点よりも多くの粒子数を必要とする。

SPH法では、初期条件として粒子をどのように配置するのかを考える必要がでてくる(短所5)。そのため、初期条件を作るためだけのプログラムを別途作成するなど、他の手法ではあまり苦勞しないことに苦勞することがある。SPH法の計算領域についてはほとんどの場合、特に何も配慮をする必要はないが(長所6)、物理的な境界条件、例えば、壁を設定するなどの場合、壁と粒子の相互作用をどのように与えるのかなどを考慮しなければならず苦勞する(短所6)。

SPH法が3次元計算向きの手法であることはすでに

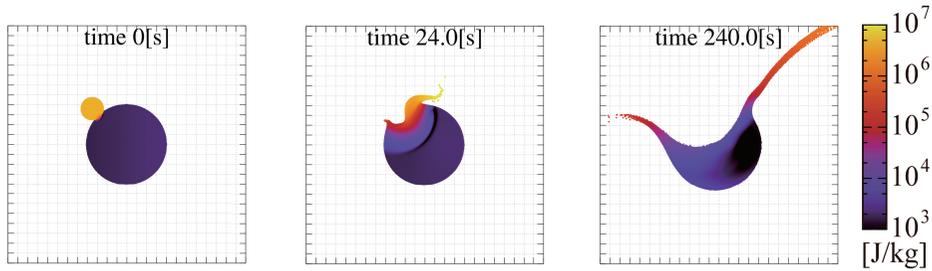


図2：破壊的衝突の一例。半径100kmのターゲット天体に半径28kmのインパクター天体が速度3km/sで斜め衝突したときの数値計算結果。図中の濃淡は運動エネルギーを表している。ターゲット天体が大きく変形し、大量のイジェクタが放出されていることがわかる。SPH法による500万粒子を用いた衝突計算である(Genda et al. (2015)[36]より改変)。

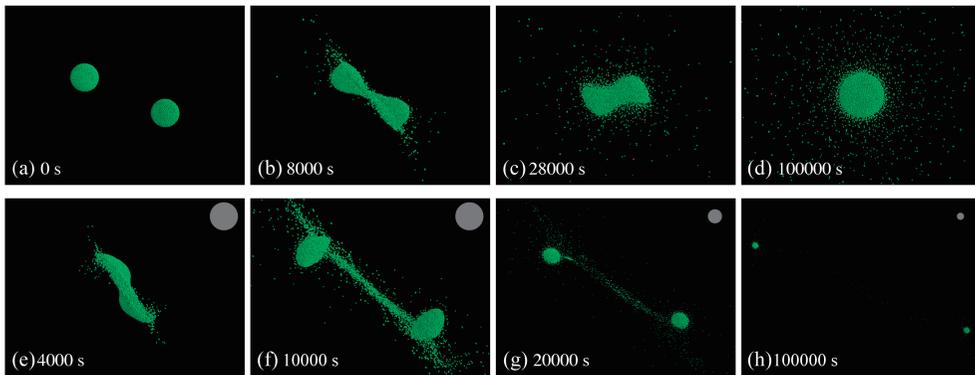


図3：SPH法を用いた巨大天体衝突計算の例。同じ質量の火星サイズの原始惑星同士が斜めに衝突している。図の上段((a)～(d))は衝突速度 $1.3 \times v_{\text{esc}}$ の場合、図の下段((e)～(h))は $1.5 \times v_{\text{esc}}$ の場合。ここで、 v_{esc} は2天体の脱出速度である。わずかな衝突速度の違いで、衝突の結果が大きく異なり、低速度の場合(上段)は、原始惑星同士が合体するが、高速度の場合(下段)は、合体せずに、お互いに離れていく。これらの衝突によって大量の物質が地球型惑星形成領域にばらまかれることが図からわかる(Genda et al. (2012)[43]より改変)。

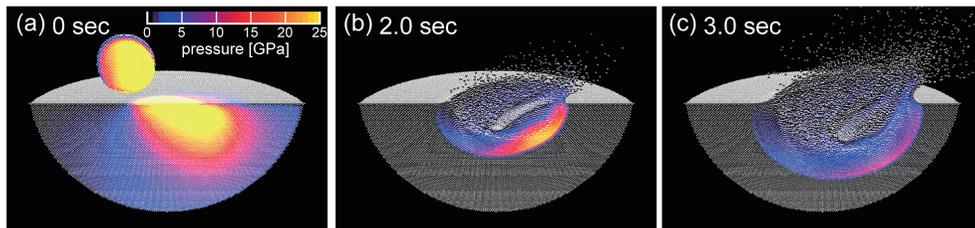


図4：氷ターゲットに直径10kmの彗星が11km/sで斜め衝突した時の数値計算例。色の濃淡は圧力分布を示しており、衝突前の(a)には最高到達圧力分布を示した(Sekine et al. (2011)[50]より改変)。

述べた(長所2)。しかし、SPH法が軸対称の座標系での計算、例えば1次元球対称や2次元軸対称の計算などには不向きであることが知られている(短所7)。軸対称の座標系では、SPH粒子は球殻もしくはトーラス状の形状をしていることになり、特に軸付近の粒子の質量は小さくなり、その扱いに困難を伴う。2次元軸対称の計算を2次元で解いた場合と、3次元で解いた場合で答えが変わってくる場合があるので注意が必

要である。

上で述べた短所は、標準SPH法の一般的な短所であり、それぞれの短所を克服するように改良が加えられたSPH法も存在している。その場合、大抵はプログラムが複雑になり、長所(1)の利点が失われる場合が多い。

5. SPH法の応用例

惑星は、星の誕生時に星の周りに付随した原始惑星円盤と呼ばれるガスと塵からできた円盤の中で誕生する[e.g.,24]. 無数の塵が衝突合体して無数の微惑星(直径1~100 km)が形成され[e.g., 25], それら微惑星がさらに衝突合体を繰り返して、原始惑星が形成される[e.g.,26]. 地球型惑星領域ではこれら原始惑星が衝突合体を繰り返して、地球サイズの天体が形成され[e.g.,27], 木星型惑星領域では、原始惑星が周囲のガスを大量に集めて木星や土星などの巨大ガス惑星が形成される[e.g.,28]. その際、揮発元素を含んだ隕石や彗星が、木星や土星の重力で散乱されて地球型惑星領域に侵入し、地球型惑星に衝突し、大気や海を形成したと考えられている[e.g.,29]. 天体衝突は惑星の形成過程、および惑星の進化過程の様々な場面で起こる現象である。この節では、SPH法が実際に使われている衝突数値計算の応用例の中で著者も実際に取り組んできた例を3つ紹介する。

5.1 微惑星同士の破壊的な衝突

微惑星の衝突合体で、原始惑星が形成されると考えられているが、微惑星同士の衝突が破壊的な場合、原始惑星は大きく成長できない[e.g., 30]. したがって、どのような衝突で、破壊的な衝突が起こるのかを定量的に調べることは、最終的に出来上がる惑星の大きさや、そもそも惑星ができないという問題を考える上で重要である。

天体衝突の破壊度を評価する指標として、インパクト天体の衝突によってターゲット天体の質量がちょうど半分になってしまう衝突エネルギー値(Q_D^*)がよく使われている。 Q_D^* は天体の質量で規格化された単位質量あたりの衝突エネルギーであり、単位としてはJ/kgの次元をもつ。衝突実験[31], スケーリング則[32], 小惑星のサイズ分布[33], 衝突数値計算[e.g., 34, 35]などを用いて、様々なサイズ($\mu\text{m}\sim 1000\text{ km}$)の天体衝突における Q_D^* が求められている。その中でも、天体の重力が重要になってくる1 kmを超えるサイズの天体衝突では、SPH法を含めた幾つかの計算手法で数値的に調べられてきた。例えば、Benz and Asphaug(1999)[34]がSPH法を用いて求めた Q_D^* の値

は、惑星形成のみならず、小惑星帯の衝突進化など様々な研究で広く用いられている。

最近、著者はSPH法を用いて Q_D^* 値の再評価を試みている[36]. 図2は、500万粒子を用いた破壊的衝突の一例である。得られた重要な結果としては、 Q_D^* の値が計算の解像度に依存し、我々が行った最低粒子数(5万粒子)と最高粒子数(500万粒子)で Q_D^* の値が約2倍異なることがわかった。詳細な検討を行った結果、衝突エネルギーが衝撃波の通過によって内部エネルギーと運動エネルギーに分配される効率が粒子数に依存し、1億粒子程度を用いれば Q_D^* の収束値が得られそうであることを確認した。これまでのSPH法を用いた研究では5万粒子程度の解像度でしか計算が行われておらず、十分な精度で Q_D^* が求められていなかったことを意味する。

5.2 原始惑星の衝突

地球型惑星形成の最終段階では、火星サイズの原始惑星同士がお互いに衝突合体を繰り返すと考えられている。原始惑星同士の衝突は、巨大天体衝突(ジャイアントインパクト)と呼ばれ、月の形成[37]や、水星の起源[38], マグマオーシャンの形成[39, 40], 大気・海の形成[41, 42]などの問題と深く関わっている。

著者は、これら巨大天体衝突が必ずしも原始惑星の単純な合体を意味するのではなく、衝突条件によっては衝突後、2つの原始惑星が離れていくような衝突や、激しくマントル物質がばら撒かれるような衝突などの様々な衝突様式があることをSPH法を用いて系統的に調べた[43]. 図3は、火星サイズの原始惑星同士の衝突の様子を2例示しており、設定した衝突条件として、衝突速度だけがわずかに異なっている。低速で衝突した場合(図3上段), 原始惑星同士は合体するが、高速で衝突した場合, 2天体は衝突後離れていくことがわかる(図3下段). どのような衝突条件で原始惑星が合体するのかを詳しく調べ、実際に地球型惑星形成の最終段階で起こる原始惑星同士の衝突の約半数は、後者のような合体しない衝突であることがわかった。

さらに、最近では、このような原始惑星同士の衝突で、大量の物質が地球型惑星形成領域にばら撒かれることがわかってきた[44, 45]. ばら撒かれた物質同士がさらに衝突破壊を繰り返し、地球型惑星形成の最終段階は地球型惑星形成領域にデブリ円盤が形成される

ことがわかってきた。実際に、赤外線観測により、若い星の多くは赤外超過がみられ[46]、その幾つかは温度の高い地球型惑星領域のデブリ円盤だと推測されている[47]。この観測された高温デブリ円盤が巨大天体衝突によるものであるとすると、我々はすでに、地球型惑星形成の現場を観測的に捉えていることになるのかもしれない。

5.3 衝突実験と衝突数値計算

天体衝突現象は惑星(衛星)形成のみならず、惑星(衛星)の大気形成にも重要な役割を果たす。例えば、衝突天体に含まれている揮発性元素が衝突によって脱ガスし大気を形成するプロセス[48]や、天体衝突によって大気を剥ぎ取るプロセス[49]などと深く関係している。

著者は、衝突実験のグループと協力して、タイタンの窒素大気形成の問題に取り組んだ[50]。実験室では、アンモニア氷に飛翔体を高速で衝突させると、圧力10 GPa程度からアンモニア氷が熱分解しはじめ、約23 GPa以上になると完全に窒素分子に分解されることがわかっていた。著者は、後期隕石重爆撃期に起こる彗星の高速衝突を数値計算し、アンモニア氷が窒素分子に分解される量を定量的に計算した。図4は、氷表面に直径10 kmの彗星が11 km/sで衝突したときの圧力分布を示している。数値計算で得られた圧力分布から生成される窒素分子の量を定量的に見積もり、最終的に現在タイタンが持っている分厚い窒素分子大気が、後期隕石重爆撃期に衝突してくる彗星のフラックスで十分形成しうることを初めて示した。

6. 最後に

衝突現象に限らず、多くの自然現象は3次元的に振る舞う。したがって、物の流れを数値的に解く場合、3次元計算が必須となってくる。SPH法は、3次元計算向きの手法であるため(長所2)、かなり昔から多くの問題に対して3次元計算がされてきた。一方、他の手法は、十分な数の格子・要素を設定しないと安定的に数値計算ができないという困難さから、十分な解像度で3次元計算がされるようになったのは、SPH法に比べると若干遅れたように思う。SPH法の場合は、少ない粒子数でもそれなりの結果が得られるため、問題

の大枠を掴むのに大変有効な手段だったと言える。その後、SPH法でも多くの粒子数が使われるようになり計算は高精度化した。別の手法でも3次元計算がされるようになり、1つの問題に対して、いくつかの手法で取り組まれるようになってきた。それぞれの計算コードには長所と短所があるので、結果をお互いに比較検討することによってより理解を深めることが可能となってきた。

SPH法は日々進化しており、例えば、日本の惑星科学の分野に限っても、最近では、物質境界面をより正しく扱うことのできるDISPH法[51, 52]が開発されたり、衝撃波面をより正しく捉え、高速に計算することのできるGodunov SPH法[53]が惑星科学へ応用されはじめています。

著者が自作した計算コードは現在、何人かの研究者が使っており、成果もあがりつつある[54, 55]。読者の中で、実際に使ってみてみたい方がいれば、連絡をいただきたい。喜んで計算コードを提供する。そしてバグなどを報告してもらえれば大変助かる。なにぶん、SPH法の短所(1)により、計算機はあまりバグを教えしてくれないので……。

謝辞

本原稿を執筆するにあたり、犬塚修一郎氏、渡邊誠一郎氏、高田淑子氏には、SPH法の歴史認識に関して参考となるご意見をいただきました。心より御礼申し上げます。また、本誌の3節を執筆するにあたり、「シミュレーション物理(朝倉書店)」と「シリーズ現代の天文学 第14巻シミュレーション天文学」を参考にさせてもらいました。また、有意義な査読意見をいただきました高田淑子氏、執筆の機会を与えてくれた長谷川直氏の両氏に感謝します。

参考文献

- [1] Popova, O. P. et al., 2013, *Science* 342, 1069.
- [2] Ohno, S. et al., 2014, *Nat. Geosci.* 7, 279.
- [3] 諸田智克, 2011, *遊星人* 20, 324.
- [4] 和田浩二, 2015, *遊星人* 24(本号).
- [5] Lucy, L. B., 1977, *Astron. J.* 82, 1013.
- [6] Gingold, R. A. and Monaghan, J. J., 1977, *Mon. Not.*

- R. Astr. Soc. 181, 375.
- [7] Benz, W. et al., 1986, *Icarus* 66, 515.
- [8] Benz, W. and Asphaug, E., 1999, *Icarus* 142, 5.
- [9] Miyama, S. M. et al., 1984, *Astrophys. J.* 279, 621.
- [10] Watanabe, S. and Miyama, S. M., 1992, *Astrophys. J.* 391, 318.
- [11] Takata, T. et al., 1994, *Icarus* 109, 3.
- [12] Monaghan, J. J., 1992, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 30, 543.
- [13] Tillotson J. H., 1962, Technical Report GA-3216, General Atomic Report.
- [14] Thompson, S. and Lauson, H., 1972, Sandia National Laboratory Report, SC-RR-71 0714:113p.
- [15] Melosh, H. J., 2007, *MAPS* 42, 2079.
- [16] Senft, L. E., and Stewart, S. T., 2008, *MAPS* 43, 1993.
- [17] Jutzi, M. et al., 2008, *Icarus* 198, 242.
- [18] Jutzi, M., 2015, *Planet. Space Sci.* 107, 3.
- [19] 黒澤耕介ほか, 2014, *遊星人* 23, 103.
- [20] Ivanov, B. A. et al. 1997, *Int. J. Impact Eng.* 20, 411.
- [21] Shuvalov, V., 1999, *MPS* 44, 1095.
- [22] Korycansky, D. G. et al., 2000, *Icarus* 146, 387.
- [23] McGlaun, J. M. et al., 1990, *Int. J. Impact Eng.* 10, 351.
- [24] Hayashi, C. et al., 1985, in *Protostars and Planets II*, 1100.
- [25] Wada, K. et al., 2007, *Astrophys. J.* 661, 320.
- [26] Kokubo, E. and Ida, S., 1998, *Icarus* 131, 171.
- [27] Kokubo, E. and Genda, H., 2010, *Astrophys. J. Lett.* 714, 21
- [28] Ikoma, M. et al., 2001, *Astrophys. J.* 533, 999.
- [29] Morbidelli, A. et al., 2000, *MPS* 35, 1309.
- [30] Kobayashi, H. and Tanaka, H., 2010, *Icarus* 206, 735.
- [31] Holsapple, K. et al., 2002, in *Asteroids III*, 443.
- [32] Housen, K. R. and Holsapple, K. A., 1990, *Icarus* 84, 226.
- [33] Durda, D. D. et al., 1998, *Icarus* 135, 431.
- [34] Benz, W. and Asphaug, E., 1999, *Icarus* 142, 5.
- [35] Leinhardt, Z. M. and Stewart, S. T., 2012, *Astrophys. J.* 745, 79.
- [36] Genda, H. et al. 2015, *Icarus* 262, 58-66.
- [37] Canup, R. M. 2004, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 42, 441.
- [38] Benz, W. et al., 2007, *Space Sci. Rev.* 132, 189.
- [39] Tonks, W. B. and Melosh, H. J., 1992, *Icarus* 100, 326.
- [40] Hamano, K. et al., 2013, *Nature* 497, 607.
- [41] Genda, H. and Abe, Y., 2003, *Icarus* 164, 149.
- [42] Genda, H. and Abe, Y., 2005, *Nature* 433, 842.
- [43] Genda, H. et al., 2012, *Astrophys. J.* 744, 137.
- [44] Genda, H. et al., 2014, *Proc. IAU Symp.* 293, 270.
- [45] Genda, H. et al. 2015, *Astrophys. J.* 810, 136 (8pp).
- [46] Wyatt, M. C. et al., 2003, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 342, 876.
- [47] Zuckerman, B. et al., 2011, *Astrophys. J.* 732, 61.
- [48] Lange, M. A. and Ahrens, T. J., 1982, *Icarus* 51, 96.
- [49] Melosh, H. J. and Vickery, A. M., 1989, *Nature* 338, 487.
- [50] Sekine, Y. et al., 2011, *Nat. Geosci.* 4, 359.
- [51] Hosono, N. et al., 2013, *Publ. Astron. Soc. Japan* 65, 108.
- [52] Hosono, N. et al., 2015, *Icarus*, submitted.
- [53] Inutsuka, S., 2002, *J. Comput. Phys.* 179, 238.
- [54] Citron, R. I. et al., 2015, *Icarus* 252, 334.
- [55] Fujita, T. et al., 2015, *Astrophys. J.*, submitted.