永年共鳴と惑星系の進化

長沢 真樹子[1]

2008年10月6日受領，2008年11月8日受理．

（**要旨**）永年共鳴は，天体の近日点や昇交点の回る周期が，摂動天体の近日点や昇交点の回る周期からでる系の固有振動の周期と一致したときに生じる．太陽系形成の歴史の中で，原始惑星系円盤の散逸などに伴い，永年共鳴はその場所をゆっくりと変えてきた．永年共鳴が通過する領域では，天体の軌道が大きく乱される．例えば小惑星が大きな離心率や軌道傾斜角を持つ事実は，永年共鳴の通過でうまく説明がつけられる．また，ガス円盤が存在しているうちに永年共鳴が原始惑星の衝突を促進することで，円軌道に近い地球型惑星を形成することも説明できる．ここでは，このように永年共鳴の移動が惑星系形成に対し，どんな寄与をするかについて説明をする．

1. 永年共鳴登場

永年共鳴は，英語ではsecular resonances という．「永年」摂動論を考えたときに「永年」項から現れる「永年」的な影響である．永年摂動論はラグランジュが最初に考え出したらしい（教科書にそう書いてある[1]）．「永年」とは，長い時間の意味である．どれくらい「永年」かというと，ざっと数万年のオーダーである．多くの天文現象と同じく，永年摂動による変化は，天文学的な年月のかかるもので，生きて実感することはまずできない．一方「共鳴」とは，外から系の固有振動に近い摂動を受けた系が固有振動で一緒に運動することだから，永年共鳴とは，摂動によって長い長い時間かけて生じる固有振動の意である．

天体力学には，いくつもの共鳴が出てくる．一番有名なのは平均運動共鳴（mean motion resonances）だろう．こちらはちょっとしたその分野の本ならば間違いなく載っている．例えば，海王星と冥王星は3：2の平均運動共鳴にある．これは，海王星が3回公転する間に，冥王星が2回公転するもので，公転周期が整数比になる．他にも，自転周期と公転周期が整数比となる共鳴などもある．一言で述べると，永年共鳴は，ある天体の軌道の変化の振動数が系の固有振動と一致して生じる．

天体現象の中には，実際に固有振動に近い摂動で共振しているのではなくても，みかけ上似た振動をするために（誤って）共鳴の名を冠されているものもある．正しい共鳴は，それが生じるとドラマチックな変動を起こす．音叉が鳴ったり，ガラスコップが割れたり，天体がよそに飛んで行ったりする．永年共鳴が生じると何が起きるのか，それが惑星系の進化にどのように影響すのかを見ていくことにしよう．

2. 永年共鳴の基礎

2.1 輪ゴムの理論

仮に木星だけが太陽の周りをまわっているとしよう．その運動はかの有名なケプラー運動で，木星は太陽を焦点とする楕円軌道上を運動する（図１a）．図１aは誇張してあって，実際の軌道はほぼ円に近い．ある空間上の地点から眺めれば，木星はいつまでも同じ軌道を描き続ける．永年的な効果を考えるときは，軌道周期程度の現象は問題にならない．つまり，木星が，実際に軌道上でどこにあるのかは気にせずに，軌道の配置だけを問題とする．この場合，木星の軌道を，太陽の周りに輪ゴムを置いたように見たて，その輪ゴムはい

1. 東京工業大学・グローバルエッジ研究院

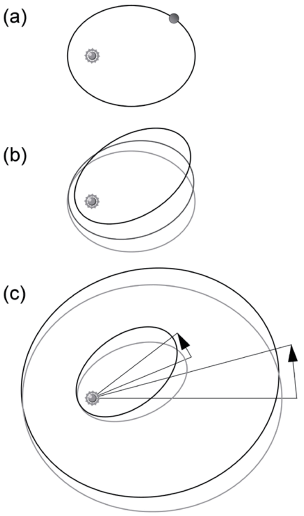

図1：惑星の運動 (a) 1 惑星の運動．軌道は動かない．(b)摂動を受ける惑星の運動．軌道は少しずつずれる．(c)2つの惑星の運動．近日点の移動速度が等しいと，軌道の相対関係は変わらない．

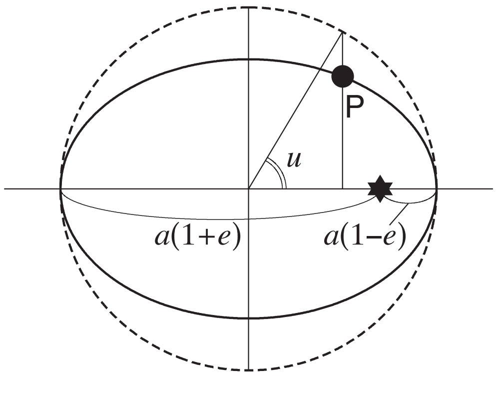

図2：惑星の位置Pに対する離心近点角u．平均近点角lは惑星の軌道長半径を直径とする円上を等速運動すると仮定したときの角速度である．

つまでもじっとしている＝永年的な変化はない，と考えられる．

ここでさらに土星も木星と同じ平面上で太陽の周りをまわっているとしよう．木星は，ケプラー運動をして一周期後に，もとの位置に戻ったつもりでも，実は土星の影響を受けているために，厳密に同じ場所には戻っていない．つまり，近日点の位置がずれてしまう．これが公転のたびに繰り返される(図1b)．輪ゴム論で言えば，輪ゴムはじわじわと移動する．土星と合わせて長い目で見ると，太陽のまわりに置かれている大きさの異なるふたつの輪ゴムの向きがぐるぐる回る．輪の形も，伸びたり縮んだりする．天体力学的に言えば，離心率が振動し，近日点経度が回転する．これが永年変化であり，惑星に加わっている力が永年摂動である．

このように惑星の位置を軌道全体にすりつぶして，その軌道の形と向きの変化のみを考えるのが永年摂動論である．

2.2　ふたつの惑星の運動

離心率をe，近日点引数をωで表して，木星と土星の運動を考えてみよう（参考[1]）．ふたつの惑星をそれぞれ添え字，i, jで表そう．まず，離心率の進化について考える．簡単のため，ふたつの惑星は，同一平面状を回っているとしよう．太陽の周りの純粋なケプラー運動は，永年的な変化がないので，永年共鳴を考える上で必要なのは木星と土星の相互重力のみである．つまり，永年変化をもたらすのは，単位質量あたりの相互ポテンシャルのうち

$$R_i = \frac{Gm_i}{r_{ij}}, \tag{1}$$

の項だけである．mは惑星の質量で，r_{ij}はふたつの惑星の距離である．しかし，この中にはまだ惑星の位置の情報がある．公転周期で軌道を平均したときに打ち消されるような項は，永年変化を考える上では不要であるから，軌道平均をとって，永年摂動の項を取り出す必要がある．

ケプラー運動は，離心近点角 u と平均近点角 l を用いて，

$$u - e\sin u = l, \tag{2}$$

とあらわされる．平均近点角とは，周期で平均した角速度で惑星が移動したと仮定したときの近点からの離角である．一周期まわるのに必要な時間を$2\pi/n$とすれば，近日点を通過した時間を$t0$として，時間 t 後には惑星は，$l = n(t-t0)$に対して（2)式で表わされる離角uを持っている(図2参照)．近日点の方向をx軸とすれば，惑星の座標は軌道長半径をaとして，

$$x = a(\cos u - e),$$
$$y = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

と表わされる．ある空間に固定された座標系に対しては，その座標に対する近点経度の分ωだけ回転してやればよい．

木星も土星もかなり円に近い運動をしているので，離心率が小さいとして，軌道を展開しよう．
それは例えば，

$$\sin u \sim \sin l + \frac{e}{2}\sin 2l + \frac{e^2}{8}(-\sin l + 3\sin 3l) + \cdots, \tag{3}$$

という風に展開できる．$\sin l$を0から2πまで積分すると(軌道平均すると)0であるから，離心率の2次までで$\langle \sin u \rangle = 0$であり，同じく，$\langle \cos u \rangle = -1/2\,e$，$\langle \cos^2 u \rangle = 1/2$，$\langle \sin^2(u+\omega) \rangle = 1/2 - \sin\omega\ \cos\omega e$，などの関係が得られる．軌道長半径は時間で変化しない（$\langle a \rangle = a$である）．これらを使えば，木星と土星の距離r_{ij}は次式のように展開される．

$$\frac{1}{r_{ij}} = \mathrm{const.} + N_{ij}(e_i^2 + e_j^2) - 2P_{ij}e_ie_j\cos(\omega_i - \omega_j). \tag{4}$$

ここで，N_{ij}，P_{ij}はふたつの惑星の軌道長半径の比だけを引数としてラプラス係数を用いて表わされる関数である．具体的な式は天体力学の本に載っているから，どうしても知りたければ本を見るといい．ここで，$e\sin\ \omega = h$, $e\cos\ \omega = k$と表すことにしよう．すると，永年摂動に関係したポテンシャルR_i(摂動関数と呼ばれる)は，

$$R_i = Gm_j[N_{ij}(h_i^2 + h_j^2 + k_i^2 + k_j^2) - 2P_{ij}(h_ih_j + k_ik_j)], \tag{5}$$

と簡単になる．ポテンシャルを時間微分すると力になるように，摂動関数を時間微分することで，軌道要素に対する運動方程式が得られる．これは，

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{2}{n_ia_i}\frac{\partial R_i}{\partial l_i}, \tag{6}$$

$$\frac{de_i}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_ia_i^2e_i}\frac{\partial R_i}{\partial \omega_i} + \frac{1-e_i^2}{n_ia_i^2e_i}\frac{\partial R_i}{\partial l_i}, \tag{7}$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_ia_i^2e_i}\frac{\partial R_i}{\partial e_i}, \tag{8}$$

と書かれる．h，kを時間で微分し，(5)-(8)式を代入することで，永年変化に関係した運動方程式は，ごく単純に

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{2Gm_j}{n_ia_i^2}(N_{ij}k_i - P_{ij}k_j), \tag{9}$$

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{2Gm_j}{n_ia_i^2}(-N_{ij}h_i + P_{ij}h_j), \tag{10}$$

となる．これは簡単に解け，この解は，初期条件から決まる定数α，βを用いて

$$h_i = e_i\sin\omega_i = \alpha_{i1}\sin(g_1t + \beta_1) + \alpha_{i2}\sin(g_2t + \beta_2), \tag{11}$$

$$k_i = e_i\cos\omega_i = \alpha_{i1}\cos(g_1t + \beta_1) + \alpha_{i2}\cos(g_2t + \beta_2), \tag{12}$$

となる．ここでg_1，g_2は

$$g^2 - 2GN_{ij}\left(\frac{m_j}{a_i^2n_i} + \frac{m_i}{a_j^2n_j}\right)g + \frac{4G^2m_im_j}{a_i^2a_j^2n_in_j}(N_{ij}^2 - P_{ij}^2) = 0, \tag{13}$$

を満たすふたつの解で，これが系の固有振動数である(g_1，g_2であってg_i，g_jではない)．ここでふたつの惑星の運動を求めたが，惑星がいくつでも同じように解くことができて，惑星の数だけ固有振動数が出る．

2.3 テスト粒子の運動

さて，木星と土星のの摂動を受けたテスト粒子の運動はどうなるだろうか．その運動は,3つの天体を考え，そのうち2つは(11)，(12)式にしたがった運動をし，3つ目の天体からは影響を受けない，としてテスト粒子の運動方程式を解いてやればよい(参考[1])．

テスト粒子の運動方程式は，テスト粒子の添え字をtとして，

$$\frac{dh_t}{dt} = \frac{2G}{n_t a_t^2}[(m_i N_{it} + m_j N_{jt})k_t - (m_i P_{it} k_i + m_j P_{jt} k_j)], \quad (14)$$

$$\frac{dk_t}{dt} = -\frac{2G}{n_t a_t^2}[(m_i N_{it} + m_j N_{jt})h_t - (m_i P_{it} h_i + m_j P_{jt} h_j)], \quad (15)$$

と書かれ，h_i, k_iの解は(11)，(12)で求まっているから，テスト粒子の固有振動数を

$$g_t = \frac{2G}{n_t a_t^2}(m_i N_{it} + m_j N_{jt}), \quad (16)$$

と書いて，その解は

$$h_t = \alpha_t \sin(g_t t + \beta_t) + \frac{2G}{n_t a_t^2}\left[\frac{m_i P_{it}\alpha_{i1} + m_j P_{jt}\alpha_{j1}}{g_t - g_1}\sin(g_1 t + \beta_1) + \frac{m_i P_{it}\alpha_{i2} + m_j P_{jt}\alpha_{j2}}{g_t - g_2}\sin(g_2 t + \beta_2)\right], \quad (17)$$

$$k_t = \alpha_t \cos(g_t t + \beta_t), + \frac{2G}{n_t a_t^2}\left[\frac{m_i P_{it}\alpha_{i1} + m_j P_{jt}\alpha_{j1}}{g_t - g_1}\cos(g_1 t + \beta_1) + \frac{m_i P_{it}\alpha_{i2} + m_j P_{jt}\alpha_{j2}}{g_t - g_2}\cos(g_2 t + \beta_2)\right], \quad (18)$$

と求めることができる.

2.4　永年共鳴，起きるとき

さて，系の固有振動と天体の固有振動が近いときに「共鳴」が起き，ドラマチックな変化が生じると述べた.テスト粒子の固有振動g_tと，摂動である系の固有振動g_1あるいはg_2とが一致すると何が起きるか？(17)，(18)式が発散する．軌道では，$e_t^2=h_t^2+k_t^2$ であるから，離心率が無限大になると言い換えられる．これが永年共鳴である.

永年共鳴はほぼ質量を無視できるような粒子を考えた場合に生じる現象であり，似たような質量をもつ惑星だけからなる系では生じない((11)式(12)式は振動解になり発散しない)．現実には，振動数が完全に一致しなくても，$(g_t$-$g_{1,2})$が十分小さければ，振幅は相当大きくなって，離心率が1に近づき，軌道が不安定になる.

g_tはテスト粒子の近日点経度が移動する速度である.また，g_1とg_2はそれぞれ木星が土星によって近日点を回される速度，土星が木星によって近日点を回される速度とやや近い((11)，(12)，(13)式からわかるように，正しくはその混合である)．このため，永年共鳴は，惑星の近日点の移動速度と小天体の近日点の移動速度が一致したときに生じる，と簡略に考えることができる．0次の説明としては，軌道が常に同じ位置関係で回り続けるので，摂動が積もり積もって，離心率が発散する，と言える(図1c)．ただし，混合であることを忘れると，ひどい目にあう．例えば，(11)，(12)式で，α_{i2}, α_{j2}が小さいければ近日点の移動速度はふ

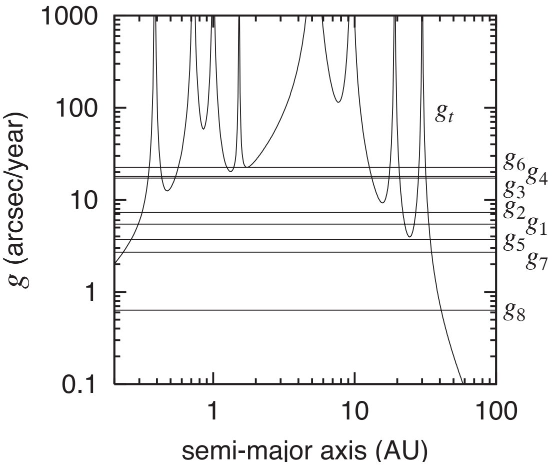

図3: 小天体の固有振動(g_t)と系の固有振動(g_1〜g_8). 交点が離心率を上昇させる永年共鳴の位置.

たつの惑星で同じになる．これは全く発散項を伴わないただの振動で，共鳴でも何でもない．アンドロメダ座ウプシロン星の惑星c，dがこの類である．アンドロメダ座ウプシロン星にこのふたつの惑星が発見された時に，それらの運動が永年共鳴であると言われて，これにはかなり弱った．このふたつの惑星は，系として十分面白くはあるが，その間で離心率が発散するようなドラマは起きない．

話はそれるが，共鳴といわれることのある，古在機構も似たような性質を持っている．これは軌道の傾き（軌道傾斜角）と円軌道からのずれ（離心率）が互いに振動する現象であるが，2惑星だけでは，振動するだけで，共鳴することはない．

ここまでの永年摂動は，離心率と近日点経度の変動を考えたが，軌道傾斜角iと昇交点経度Ωについても問題はほぼ同じように解けて，同じような発散現象を見ることができる．軌道傾斜角の永年共鳴の0次説明としては，小天体の傾いた軌道平面がぐるぐる回る速度が，惑星の軌道面の回る速度と一致すると，軌道傾斜角が増大する．

現実には，離心率が大きくなると2.2章の展開式は使えなくなって非線形効果が出てくるし，離心率が1を超えると楕円軌道でもなくなって，上記の式群は適用できなくなるが，一般的に，離心率が励起されると，軌道は不安定になり，天体はそこにいられなくなる．永年共鳴の最大の特徴は，このように「軌道長半径を変化させることなく」，対象の天体の「離心率や軌道傾斜角を非常に増大させる」ことにある．

2.5 永年共鳴はどこにあるか

g_tは木星と土星の質量と軌道長半径，そしてテスト粒子の軌道長半径のみで決まる関数である．つまり，木星，土星の質量と軌道長半径を与えてしまえば，$g_{1,2}$は一意的に決まり，g_tはテスト粒子の軌道長半径だけに依存する．要するに，太陽系において，永年共鳴の生じる場所はg_1のg_2のそれぞれに対して，（１つとは限らないが）決定されている．それはどこか？

木星よりも内側では，ひとつは，金星の近くにある．もうひとつは小惑星帯の内側の端近くにある．そのせいで小惑星帯は2AUのところで切れている．g_tを8つの惑星に対して書いた図が図3であり，8つの惑星に対して8つある系の振動数g_1～g_8を直線で示してある．木星，土星によって生じる固有振動はg_5，g_6である．g_tの曲線とg_1～g_8の直線との交点が離心率の永年共鳴の場所となる．この近傍では，小天体は安定な軌道を保ちにくい．実際小惑星の族は，永年共鳴の場所を境として，きれいに分布が区切られている．

3. 永年共鳴発進

3.1 系のポテンシャルの変化＝永年共鳴の移動

図3で見たように，現在の太陽系では，永年共鳴の生じる場所が決まっている．その近傍では小天体の軌道が不安定になるが，その影響はローカルなものである．永年共鳴の場所が決まっているのは，系のポテンシャルが決まっているからである．もしも，系のポテンシャルが時間的に変化するなら，永年共鳴の位置も時間で変わる．ただし，(17)，(18)式を見ればわかるように，永年共鳴で離心率が変化するには，結局のところ$1/(g_t\text{-}g_i)$のオーダーの時間が必要である．それは，数十万年のオーダーであり，それよりも短い間に終わってしまう変化では，実質的には永年共鳴の影響が現れない．また，α_{ik}の振幅も，摂動を与える惑星の離心率と結びついた量であるから，惑星がほぼ円軌道であれば，その影響はかなり限られたものとなる．

惑星形成時代に，このように長い時間スケールでポテンシャルが変化する原因は，いくつか考えられる．それはゆっくりした惑星の成長や，移動，原始惑星系円盤の散逸などである．また，太陽の自転速度が変わるとJ2ポテンシャルが変わるので，それでも共鳴の位置は変化する．この中で，惑星の成長は，惑星が小さい頃は摂動があまり強くないため，結果的に系に大きな影響を与えない．また，惑星の移動も，大きな摂動を及ぼす重い惑星ほど動きにくいため，系全体には，さほど重大な効果をもたらさない．もっとも重要なのは，木星質量の10倍もあったと考えられている原始惑星系円盤のガスの散逸である．円盤散逸の時間スケールは10^6-10^7年のオーダーと言われているから，共鳴の移動も，それくらいゆっくりである．そして，円盤が「どのように」散逸するかで，共鳴の位置が「どのように」移動するかが違ってくる．

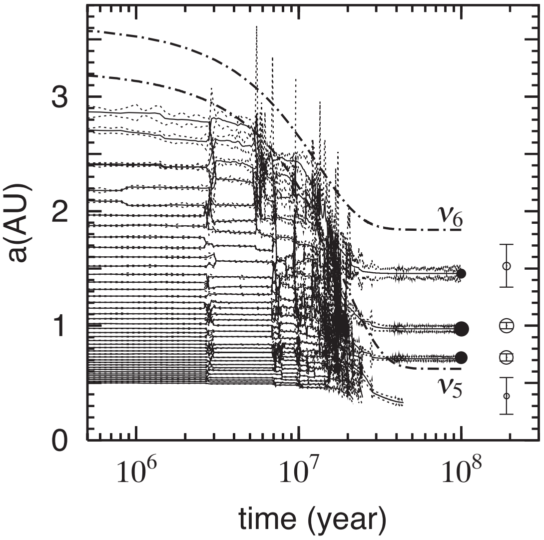

図4： 原始惑星の衝突成長の計算例. 実線は軌道長半径, 点線は近日点, 遠日点の位置, 一点破線は永年共鳴の位置. 黒丸が最終的に形成された惑星. 円の大きさは半径に比例. 白丸は太陽系の地球型惑星. 白丸の縦線は各惑星の平均的な近日点と遠日点の位置.

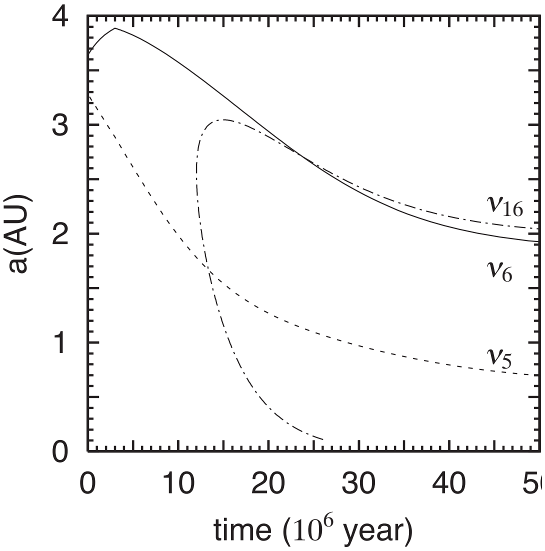

図5： 10AUより内側の円盤が先に散逸する場合の永年共鳴の移動経路. 内側の円盤の指数関数的なガス散逸の時間スケールが300万年, 外側の円盤の散逸の時間スケールが1000万年の場合.

3.2　去りゆくガス円盤

軸対称なガス円盤があったとしよう．ちょっと見，軌道に対して及ぼす力は軸対称であるから，軌道の近日点は動かないような気がする．残念ながらこれは大きな間違いである．球殻のポテンシャルならこの記述は正しい．球殻の中の運動は，球殻からはなんら影響を受けない．しかし，円盤のポテンシャルは$1/r^2$のポテンシャルではないから，当然，惑星の近日点を移動させる．しかも，惑星の摂動による回転とは，逆に回すことまである．

現在の太陽系の惑星を再現するのに必要な最低質量の円盤モデルに林モデルがある．このモデルでは，惑星を軌道上にすりつぶして広げ，固体面密度分布が$r^{-3/2}$に比例するとしている．ガスは固体の100倍の質量を仮定している．例えば，この林モデルの円盤を加えると，現在太陽から2AUにある離心率の永年共鳴の位置は，4AUくらいのところに来る．惑星の近日点は, 円盤によってそこそこの速度で逆回転する. そこで, 系の固有振動は負にやや大きな値となる．より密度の濃い所にいるテスト粒子は，円盤によって惑星よりもさらに速く逆方向に近点を回される．それが系の固有振動と釣り合うためには，正の摂動をより強く受ける必要があり，つまり，木星の近くに共鳴の位置がずれる．付近の円盤は逆方向に，遠くの円盤は正の方向に近点を回すので，共鳴の位置を直感により推測するのはあまり容易ではない．経路はともかく，昔4AUの位置にあった共鳴が百万年以上かけて現在の2AUに移動するわけである．

ガス円盤進化の物理は，完全には解明されていない．円盤の散逸も，内側の方では粘性散逸が，外側の方では光蒸発が効くといわれている．大きな惑星が円盤にギャップを開けると，そこより内側の円盤は外側からの物質の供給を断たれてすぐになくなるようで，観測で内側に穴のあいた円盤が見つかるのはそのためらしい．惑星形成と円盤散逸の時期の兼ね合いもはっきりしていない．地球型惑星が，ガス円盤の中で形成されたと考えると，始原的なガスをまとってしまって望ましくないとも言われるし，逆に，ガスがないと軌道が円軌道にならないとも言われる．はっきりしているのは，ガス惑星である木星ができたときにはガスがあり，今はもうないことである．そこで，現在の太陽系を説

明するのに都合のよい永年共鳴移動をもたらすガス円盤の散逸方法はどのようなものか，考えるという逆のアプローチを試みることにしよう．

4. 永年共鳴的惑星形成論

4.1 小惑星の軌道の謎，地球型惑星の離心率の謎

太陽系の惑星は，太陽との関わりが複雑でサイズの小さな水星を除けば，永年変化を考えても，その離心率は0 ～ 0.1程度の範囲にある．また，不変面(系の重心を通る全角運動量ベクトルに垂直な面)に対する軌道傾斜角も0 ～ 0.1（rad)の範囲にある．要するにほぼ円軌道で，同じ平面上を回っている．これに対し，小惑星の離心率は，0から0.6にまでほぼ一様に分布している．この上限も，火星，木星軌道と交差し，長い間には，いつか惑星の散乱を受けるために，飛ばされてなくなるために決まっているに過ぎない．軌道傾斜角も0.6(rad)程度まで分布していて，こちらの上限は，木星，土星との永年共鳴で決まっている．

小天体は，そもそも惑星の摂動で軌道が変化しやすいものではあるが，現在の惑星の軌道配置を考える限り，離心率，軌道傾斜角はこれほどまでに大きくはならない．また，林モデルの質量分布を考えると，小惑星帯には，もともとは現在の1万倍は物質があってもよいと考えられている．これが小惑星帯の謎である．

地球型惑星は，原始惑星が衝突した結果最終的に現在の大きさになっている．原始惑星同士で衝突があることは，一度は軌道が乱されたことを示している．この最終段階の惑星成長を数値計算すると，ガス円盤がない状態で(抵抗の働かない状態で)衝突が生じた場合，地球や金星に0.11 ± 0.07程度の離心率が残ってしまう([2])．現在の地球と金星の平均的な離心率は0.03程度であるから，何らかの抵抗が働いて離心率が小さくなったと考えられる．しかし，問題は，抵抗が働くような環境では，原始惑星の軌道の乱れは小さく衝突が起きにくい点にある．惑星を成長させながらも，惑星の離心率を下げるにはテクニックが必要である．

小惑星の離心率，軌道傾斜角を励起し総質量を減らすメカニズムはいくつか提案されている．例えば小惑星帯に原始惑星や惑星があって，小惑星帯をかき回してからいなくなるというシナリオもある．離心率の小さい惑星を作るには，ガスがうまい程度に残った状態で原始惑星同士の衝突が起きればよい([3])．しかしここでは，永年共鳴で太陽系の進化を統一的に理解するという観点から，永年共鳴でこれらの問題に対し何ができるかを見てみよう．

4.2 最初の永年共鳴

永年共鳴が通過すれば，ガス円盤の中で抵抗を受けていても，原始惑星の軌道も小惑星の離心率，軌道傾斜角も励起される．4.1章で述べた謎は大体において解決される．そこで問題は，永年共鳴が必要な領域を通過するかどうかにすり替わる．

地球型惑星の領域，小惑星の領域に，離心率の永年共鳴を通過させるのは，しごく容易である．円盤が散逸する前には，永年共鳴は4AU程度の位置にあり，散逸後には，木星と関係した離心率の永年共鳴($\nu 5$と呼ぶ)は0.6AUに，土星に関係した離心率の永年共鳴($\nu 6$と呼ぶ)は2AUにある．よほどひねくれた円盤散逸方法を考えない限り，まず永年共鳴は地球型惑星，小惑星領域全体を通過する．そこで，まずはガス円盤が全域で一様に散逸したと考えてみよう．

30個程度の孤立質量の原始惑星を0.5AUから3AUまで並べて，さらに木星と土星を置き，時間経過に対して，ガス円盤の質量を指数関数的に減少させる．数値計算の一例が図4である．軌道長半径(実線)と，近日点，遠日点距離(点線)の進化が示してある．破線で描いたのは，$\nu 5$と$\nu 6$の位置である．$\nu 5$の共鳴が近づくと，原始惑星の離心率が跳ね上げられ，隣接する原始惑星と衝突を始める．衝突によって惑星は大きくなるが，ガス円盤の重力的抵抗で，離心率とともに，軌道長半径が小さくなる．これによって，原始惑星は永年共鳴と一緒に移動しながら，成長と中心星方向への移動を続ける．ガスが少なくなると，惑星は共鳴をはずれ，図4の場合，散逸が開始してから30万年程度で，円軌道の3つの地球型惑星が形成されている（詳細は[4]を参照)．

見ての通り小惑星帯にも永年共鳴が通過している．この計算では小惑星帯にも原始惑星を置いているが，テスト粒子を置いての計算では，10^6-10^7年かけてガスが散逸するならば，十分観測と合致するだけ離心率が上昇することがわかる(詳細は[5]を参照)．ただし，離心率が上昇するとガス抵抗が強く働くので，ガス円盤

が濃い場合，10km程度以下の小惑星はほとんどが失われてしまう．小惑星帯は，地球型惑星領域に比べて物質が欠乏し，1万分の1しかないと言われているから，これ自体は問題がない．しかし，離心率の大きな小惑星は失われるし，図に「描いていない」ように軌道傾斜角の永年共鳴は小惑星領域で出現しない．これでは何にもならない．

4.3 二番目の永年共鳴

現在小惑星帯の近くにあって，軌道傾斜角に関係する永年共鳴は，土星に強く関係する2AUのものだけで，これは林モデルの円盤を考えると消えうせる（直感的に言えば，図3のような図で曲線が上に上がってしまって直線と交差しない）．

小惑星帯での永年共鳴の移動を考える場合，土星軌道の外側部分のガス円盤が先に散逸すると都合のいいことがある．外側のガスが散逸するときに，土星に関する軌道傾斜角の永年共鳴（ν16と呼ばれる）が小惑星帯を通るようになるからだ．10AUよりも内側の円盤が300万年のタイムスケールで一様に散逸を始め，さらにその後300万年たってから，10AUよりも外側の円盤が1000万年のタイムスケールで一様に散逸したとしよう．図5に，地球型惑星領域，小惑星帯を通過するν5，ν6，ν16の位置を示す．内側の円盤が散逸する時期に，ひとつ目の共鳴ν5が通過する．そしてν6，ν16が，時間差攻撃でほとんどガスのなくなった小惑星帯を通過することがわかる．そしてこの共鳴は小惑星帯だけに作用し，地球型惑星の軌道は乱さない．また，永年共鳴はそれだけでは天体の軌道長半径を変化させないので，ふたつ目の共鳴の通過では小惑星同士はあまり混じり合わない．

このことから，a)土星軌道より内側のガスが散逸するときに，地球型惑星の最終形成が行われ，小惑星もガス抵抗や原始惑星の摂動で大量に失われ，b)土星軌道より外側の円盤が散逸するときに，小惑星の軌道が励起される，というシナリオを描くことができる．

4.4 なくてはならないもの

この2段階散逸モデルは，地球型惑星領域，小惑星帯領域の天体の軌道をうまく説明することができる．とは言っても，残念ながら，無条件ではない．この永年共鳴的惑星形成モデルがきちんと機能するには，根本的な条件がある．まずひとつは，木星の存在が絶対に必要である．木星がなければ，永年摂動論は始まらない．きちんと言うならば，太陽系類似の地球型惑星系を形成するには，地球型惑星領域が最終形成する前に，最低でも現在程度の質量と離心率を持った木星が必要である．ふたつ目に，ガス円盤の散逸の時間スケールは，ある程度以上長くなければならない．抵抗が働くには，木星形成の時まで地球型惑星領域にガス円盤が残っていなければならないし，共鳴が十分に効力を発揮するには，最低でも数百万年程度の時間スケールが必要である．これらが満たされて初めて，永年共鳴が惑星形成に寄与するのである．

5. 系外惑星の永年共鳴

当然ながら，木星型惑星の存在のしかたが太陽系に似ていない（今のところそれが大半である）太陽系外惑星系では，永年共鳴は，存在するかもしれない小惑星の離心率や軌道傾斜角を，励起する場合もあるし，しない場合もある．あるかもしれない地球型惑星は，永年共鳴で最終形成を促進されるかもしれないし，されないかもしれない．これらは完全に初期の木星型惑星の配置とガス円盤の構造による．逆に言うと，永年共鳴が関与するかしないかで，惑星系に多様性が生まれ得ることになる．

太陽系外では，もうひとつ面白い永年摂動の効果がある．２章で，惑星だけでは永年共鳴は起きないとしつこく述べた．しかし，原始惑星系円盤など，摂動の強い別の物体が存在すると，話が一変する．例えば，中心星質量の1/100倍程度のガス円盤にとって，惑星はテスト粒子に近い．そこで，ガス円盤を摂動天体として，惑星間に永年共鳴のようなものが生じる．テスト粒子に近いといっても，惑星同士は相互作用でカップルしているので，離心率の変化は無限大ではなく「大きな変化」に留まり，角運動量も相手の惑星からくみ出すので，角運動量が一方的に変化するのではなく，「交換」となる．

例えば，前述のアンドロメダ座ウプシロン星では，惑星c，dの内側に小さい惑星bが存在している．この惑星は，古典的な計算では，惑星c，dの永年共鳴の近くにいて，離心率の振幅が非常に大きくなる．しかし，実際に，中心星の相対論効果まで含めて永年摂動論

を展開すると，その効果で惑星 b は永年共鳴から外れ，生き残れることがわかる([6])．ところがさらに，中心星の半径の進化やガス円盤の散逸まで考えると，円盤散逸時に中心星が2日以下程度の自転をしていない限り，やはりこの惑星bは失われてることがわかる（[7]）．このように，ある種の状況では，永年共鳴の効果は，初期の惑星系の状況に対し面白い制約をかけることができる．

6. 最後に

すでに触れたが，永年共鳴を用いなくても，太陽系に残る謎を説明する方法はある．その中で，円盤散逸に伴う永年共鳴を考える最大の理由は，円盤が散逸する限り永年共鳴の移動は「起きてしまう」ことにある．考えている天体の運動に深く寄与するかどうかは別としても，他の方法で，がんばってガシガシ天体の近点や昇交点を変え続けない限り，永年共鳴の効果は，避けられないのである．

ここでは，原始惑星系円盤の散逸に限って話をしたが，背景ポテンシャルの大きなゆっくりとした変化は他にもあるし，対象となるのも原始惑星や小惑星だけではない．何か固有振動をもつ運動が，摂動の固有振動の大局的な変化にさらされたときに，この永年共鳴の移動の効果を思い出していただけたら幸いである．

謝 辞

ここに述べた研究は，井田茂教授，ダグラス・リン教授，小久保英一郎准教授のご教授のもとに行われた．何よりもこれらの先生方に心より御礼申し上げる．また，議論やセミナーを通じて研究に様々な示唆を下さった多くの皆様，そして注意深い査読を通じてコメントをくださった，武田隆顕さんに深く感謝するものである．

参考文献

[1] Brouwer, D., and Clemence, G. M. 1961, Methods of Celestial Mechanics (New York: Academic Press)
[2] Kokubo, E. et al., 2006, ApJ, 642, 1131
[3] Kominami J. and Ida S., 2004, Icarus 167, 231
[4] Nagasawa, M. et al., 2005, ApJ, 635, 578
[5] Nagasawa, M. et al., 2000, AJ, 119, 1480
[6] Mardling, R. A. and Lin, D. N. C., 2004, ApJ, 614, 955
[7] Nagasawa, M. and Lin, D. N. C., 2005, ApJ, 632, 1140