

Type-I 惑星移動と原始惑星形成

小南 淳子¹, 田中 秀和², 井田 茂³

近年,さまざまな惑星系が発見されてきている. それらがどのようにして形成されたのかを説明する試みは多くなされている. 私たちに一番身近な惑星系はこの太陽系だ. この太陽系で惑星がどのようにして形成されたのかを説明する, 一般的に認められているシナリオが存在する. そのシナリオの中でも, まだ解かれていない謎がある. 著者は, そのうちの一つである惑星の中心星への落下 (Type-I 惑星移動) 問題を含めた惑星形成に着目した. この Type-I 惑星移動の効果をとりにくると, 単純に考えると固体は全てなくなってしまふ. しかし, 本当にそのようなことがおこるのか. 原始惑星は成長しつつ中心星へ移動していくかもしれない. 成長しきる前に中心星へ落下してしまう場合, 残った微惑星からまた先ほどより小さい原始惑星の暴走成長が起こる. 質量が小さい方が落下速度が遅く, またガスも徐々に散逸するので暴走成長したものの惑星落下は時間と共に減速してくる. それにより原始惑星が生き残る可能性がでてくる. 本研究では N 体数値計算と解析的な方法を使い, 原始惑星は生き残れることを示した. すなわち, 微惑星円盤で小さいガス/ダスト比が実現されれば惑星は生き残ることができることを確かめた.

1 惑星形成シナリオ

まず現在広く認められている惑星形成シナリオについて説明する. 原始惑星系円盤の中のダスト成分

からキロメートルサイズの微惑星が形成される. 微惑星がどのように形成されるのかはまださまざまな説が存在しているがここでは微惑星は形成され, 次の段階に進めること仮定する. このキロメートルサイズの微惑星は衝突し, 合体成長する. 大きめの天体は重力のため, より多くの微惑星を引き付け 暴走的に成長する. この際, 天体は月質量弱程度の質量まで成長する [1]. 暴走成長した天体の周りには微惑星がまだ残っている. 暴走成長したものは暴走成長したものの同じ割合で微惑星を集積することで徐々に成長していく. この段階を寡占成長という呼ぶ. その寡占成長を経た天体は, 地球型惑星領域では火星質量程度の質量を持つ. この天体のことを原始惑星と呼ぶ [1]. 地球型惑星領域ではこの原始惑星が数十個, 等間隔に並ぶという計算結果がでている [2]. これらの原始惑星の軌道はガスによりほぼ同一軌道平面上で円軌道をとると考えられる. しかし, 原始惑星どうしの重力相互作用や巨大惑星からの摂動により, 軌道が段々乱されてくる. 離心率や軌道傾斜角は上昇し, 軌道交差が起こり始め, 衝突合体するようになる [3]. このような巨大衝突を経て, 地球質量程度の惑星が形成されると考えられる. これらの地球型惑星の離心率, 軌道傾斜角は形成当初は大きい, 残っている円盤ガスにより減少し, 現在のようなほぼ円軌道な地球型惑星が形成された [4].

2 ガス円盤中の軌道進化

この惑星形成は前述したようにガス円盤中で進行す

1. 東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

2. 北海道大学低温科学研究所

3. 東京工業大学大学院理工学研究科地球惑星科学専攻

る。ガスには天体の離心率や軌道傾斜角を小さくする働きのみならず、軌道長半径を減少させる働きもある。天体がガス円盤から受ける力は、一つはガス抵抗、もう一つが重力相互作用である。単位質量に働くガス抵抗は

$$\mathbf{F}_{\text{gas}} = -\frac{1}{2m} C_D \pi D \rho_g |\mathbf{u}| \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

で記述される。但し、 C_D はガス抵抗係数で天体の質量が微惑星ほどの時は0.5という値になり[5]、 m 、 D はそれぞれ天体の質量と物理半径、 ρ_g はガスの密度で \mathbf{u} は天体のガスに対する相対速度である。ここでは離心率 e とケプラー速度 v_{kep} を使い、 $\mathbf{u} \sim e v_{\text{kep}}$ とする。太陽からの距離 r にある天体に対するガス抵抗の効くタイムスケールは以下ようになる。

$$\tau_{\text{gas}} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{F}_{\text{gas}}|} \simeq 10^6 \left(\frac{m}{M_{\oplus}} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_p}{3\text{g/cm}^3} \right)^{2/3} \left(\frac{\Sigma_g}{\Sigma_{g,\text{SN}}} \right)^{-1} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{13/4} \left(\frac{e}{0.01} \right)^{-1} \text{ years}. \quad (2.2)$$

但し、 Σ_g はガス面密度で添字 SN は最小質量星雲モデルのガス面密度を表している。もう一つ、ガス円盤があることにより天体にかかる力がある。それは力学的摩擦力であり、以下のような機構で働く。天体はガス円盤に重力的に作用し、密度波を立てる。天体の離心率、軌道傾斜角は小さくなり、またその密度波は天体のすぐ内側と外側に発生し、天体にトルクを及ぼす[6]。両側のトルクが釣り合っていれば、動径方向に移動することはないが、現在までの線形計算をおこなった研究によると正味のトルクは天体の角運動量を取り去り、天体を中心星方向へ動かすことが知られている[7]。力の表式は Tanaka et al. (2002) [7] と Tanaka and Ward (2004) [8] をもとにしてとりいれた。離心率 e と軌道傾斜角 i が減少するタイムスケールは

$$\tau_{\text{grav},e} = 1.3\tau_{\text{grav}}, \quad \tau_{\text{grav},i} = 1.8\tau_{\text{grav}}, \quad (2.3)$$

但し、

$$\begin{aligned} \tau_{\text{grav}} &= \left(\frac{m_p}{M_{\oplus}} \right)^{-1} \left(\frac{\Sigma_g r^2}{M_{\oplus}} \right)^{-1} \left(\frac{c_s}{a \Omega_p} \right)^4 \Omega_p^{-1} \\ &= 4 \times 10^2 \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^2 \left(\frac{m_p}{M_{\oplus}} \right)^{-1} \left(\frac{\Sigma_g}{\Sigma_{g,\text{SN}}} \right)^{-1} \text{ years} \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる。このとき m_p は原始惑星の質量、 c_s は音速、 Ω_p はケプラー角速度である。今、注目したいのは中心星への天体の落下である。そのタイムスケールを見積もると、以下ようになる[8]。

$$\begin{aligned} \tau_{\text{grav,mig}} &= \frac{r}{\dot{r}} = 7.0 \times \\ &10^4 \left(\frac{m_p}{M_{\oplus}} \right)^{-1} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{3/2} \left(\frac{\Sigma_g}{\Sigma_{g,\text{SN}}} \right)^{-1} \text{ years}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

このように天体がガス円盤からの力学的摩擦力により中心星へ落下してしまう現象は「Type-I 惑星移動」と呼ばれている。式(2.2)より、天体の質量が小さいうちは、ガス抵抗により落下時間は天体の成長とともに長くなる。しかし、式(2.4)と式(2.2)を比べると、天体がほぼ月質量になると惑星の成長とともに落下時間が短くなることが分かる。この Type-I 惑星移動を考慮しない場合、原始惑星は暴走成長と寡占成長を通して孤立質量まで成長する[1][2]。この孤立質量とは暴走成長した原始惑星に近傍（原始惑星の重力半径の数倍から10倍の領域）の微惑星が全て集積した場合の質量である。この孤立質量は地球型惑星領域では火星サイズ程である。ここまで成長した原始惑星は Type-I 惑星移動により中心星へ落下してしまう可能性がある。

3 惑星落下問題

天体が成長していき、中心星へ移動する Type-I 惑星移動が起こると地球型惑星はどのくらいで落下するのかを見積もる。地球型惑星は原始惑星まで暴走成長、寡占成長し、一旦火星質量程度で軌道が安定化する[2]。その時点では最小質量モデルのガス面密度程度はガスが存在すると考える。その後ガスが徐々に晴れ、巨大衝突時代が訪れ、地球型惑星が形成される。落下の危険が存在するのは、暴走成長を通じて月質量程ま

で成長し、火星質量まで寡占成長する間、そして火星質量まで成長し、ガスがまだ晴れず巨大衝突時代を待つ間である。火星質量が中心星に落下するタイムスケールは式(2.5)より 7×10^5 年ほどになる。ガスの寿命は観測により数百万年といわれているので落下タイムスケールの方が若干短い。また、木星型惑星のコアはもっと状況が悪い。例えば木星のコアを $5M_{\oplus}$ とする。このコアの落下タイムスケールは 1.5×10^5 年となり、ガスの散逸タイムスケールより十分短いため、中心星落下は免れない。注意しなければいけないのは、コアが成長するまでガスが存在しないと巨大ガス惑星は形成されないということだ。ガスがないとガス集積できないのに、ガスがあると中心星へ短いタイムスケールで落ちてしまうというジレンマが生じる。以上の問題を惑星落下問題といい、現在の惑星形成シナリオの大きな問題点の一つとなっている。

4 落下速度の不定性

とはいえ、天体が落下していく落下速度にはいくつかの不定性がある。その一つが「Type-II 惑星移動」への移行である。天体が $10M_{\oplus}$ ほどになるとガスを捕獲し、周囲のガス円盤にはギャップが形成される。ギャップに閉じ込められた惑星はギャップと同じゆっくりとした速度で落下を始める。このことを「Type-II 惑星移動」という[9]。この移動タイムスケールは Type-I 惑星移動のタイムスケールより1000倍くらい長い。つまり Type-II に移行すれば惑星は生き残れる可能性が高くなるということだ。しかし原始惑星は $1M_{\oplus}$ にみえない[2]。地球型惑星領域で天体がさきにガス捕獲を開始し、ギャップが形成され、Type-II 惑星移動にうつるとは考えにくい。

また、円盤には乱流があるとすると Type-I 惑星移動の落下タイムスケールは変化する可能性がある。円盤中に乱流が存在する可能性は高い。その乱流により、移動の方向はランダムに変わる可能性がある。しかしこのランダムな成分を平均すると、正味には中心星方

向へ移動する成分が残り、惑星は中心星落下を免れない可能性がある。しかし、その移動の方向もランダムな要素と中心星への方向の要素%が存在すると思われる。中心星への方向の要素が存在する限り惑星は中心星落下を免れない可能性がある。乱流中の惑星形成はまだ不定性がおおきいので今後の研究課題でもある。

もう一つの可能性は微惑星円盤からの効果である。微惑星円盤内に原始惑星を置いた場合、原始惑星が重力により微惑星を跳ね飛ばし、微惑星円盤にギャップを形成する[10]。付近にたまった微惑星は原始惑星にトルクを及ぼし、原始惑星の中心星への落下速度は変化する可能性がある。さらに原始惑星が複数あった場合、それらの相互作用も Type-I 惑星移動速度に影響を及ぼす可能性がある。この最後の二つの非線形効果は N 体計算を行わないと確かめることができない。

5 微惑星円盤と複数の原始惑星の影響

微惑星円盤から、また、複数の原始惑星があることによる非線形効果からの影響を Kominami, Tanaka and Ida (2005) では N 体計算することで確かめた。ここでは結果を簡単に紹介する。

まず微惑星円盤でギャップが形成されることで Type-I 惑星移動がどのように変化するかを調べる為に、0.9AU から 1.1AU まで微惑星円盤を考え、その中に原始惑星の種を一つ置く。原始惑星の種の質量は個々の微惑星の質量の1000倍である。固体面密度、ガス面密度は最小質量星雲モデルに合うように設定した。全ての粒子にガス抵抗と、Type-I 惑星移動を引き起こすガス円盤との力学的摩擦が働くように、運動方程式にそれぞれの力を加えた。計算時間を実行可能な長さに制限するために、それぞれの微惑星の初期質量は 3×10^{25} g に設定した。実際の微惑星より大きめになため、ガス抵抗のみ、最小質量星雲モデル内での力の40倍の力が働くようにした。最小質量星雲モデル内では、同じ大きさの力が 5×10^{18} g の天体に働くことになる。ギャップは形成され原始惑星の落下速度

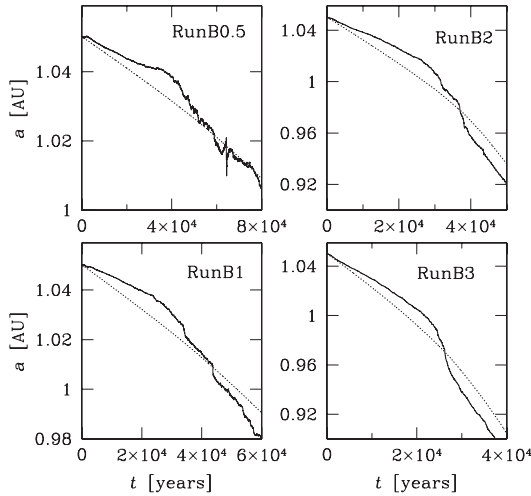


図1: 原始惑星の種の軌道長半径の時間依存性. 点線は式(2.5)を積分することにより導出した結果. Type-I 惑星移動が線形理論通りに進むならばこの点線に合う. 実線が N 体計算結果となっている.

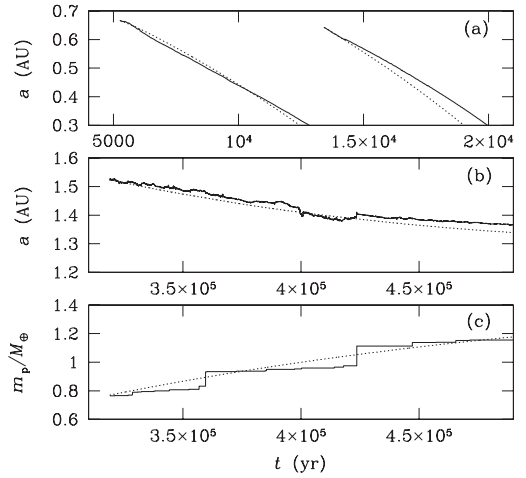


図3: 最大質量の原始惑星の軌道長半径と質量の時間進化. 点線は解析解であり, 実線がN体計算結果を表している.

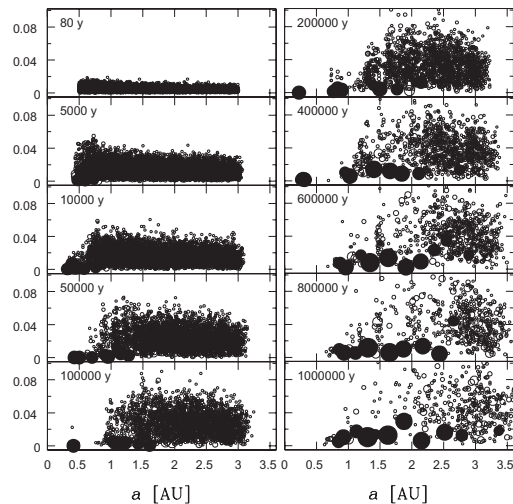


図2: 離心率-軌道長半径平面上で表した典型的な軌道進化. 丸の大きさは微惑星や原始惑星の大きさを表しており, 黒く塗られたものは $0.1M_{\oplus}$ 以上の原始惑星を示している.

は一時的に遅くなる. 図1はいくつかの計算結果を表している. 落下速度をパラメータとしてふり, 原始惑星の種の軌道長半径の時間依存性を示した. RunB0.5, RunB1, RunB2, RunB3の数字は落下速度を表している. (1 は最小質量星雲モデルでの落下速度. 他の数字はその倍数.) 点線は式(2.5)より導出した線形結

果であり, Type-I 移動の通りの落下速度で進化するのであれば, この線と傾きは一致する. 実線が N 体計算結果となっている. どの計算結果も一旦は速度が(傾きが)緩やかになっているがしばらくすると速度はほぼ線形の速度に戻る. これは微惑星が成長すると, 未集積の微惑星のランダム速度が上昇し, 原始惑星の種の周りのギャップが壊される為である. ギャップが形成されている間は落下速度は遅くなるが微惑星の集積も考慮した場合, トータルな落下タイムスケールを有意に変化させるほどその期間は長く続かないことがわかった.

次に他の原始惑星の存在がType-I 惑星落下にどのような影響を及ぼすのかをみてみる. この場合の計算では先ほどの計算よりも広い計算領域を扱う. また, 初期条件は微惑星のみから始め Type-I 惑星移動の効果も含めつつ原始惑星が暴走成長をおこした時のシミュレーションする. 初期条件は 0.5 - 3.0 AU に微惑星配置する. 固体面密度, ガス面密度共に, 最小質量星雲モデルの5倍の量から計算をスタートさせた. ガスは $\tau_{\text{dep}} = 10^5$ 年で指数関数的に減少させる. 天体が中心星へ動径方向へ移動していき 0.2 AU 以内に達すると, 中心星へ落下したものとみなした. 図2は一つ

の計算結果の軌道進化を離心率 - 軌道長半径の平面上に表している。暴走成長は内側から起こる。内側ほど、また成長したもののほど Type-I 惑星移動速度は速くなるため、内側から原始惑星は中心星へと落下していく。外側でも暴走成長がおり、原始惑星は形成されるが内側での暴走成長、そして中心星落下のタイムスケールの方が短い。図3は最大質量の原始惑星の軌道長半径と質量の時間進化を表している。点線は解析解であり Type-I 惑星移動が減速せずに起こった場合の結果である。実線がN体計算結果を表している。(a)は比較的初期の軌道進化を表しており、5000年、13000年での最大質量の原始惑星の軌道長半径の進化を示している。(b)では後期、 3×10^5 年経った後の最大質量の原始惑星の軌道長半径の進化を示している。(a)、(b)ともに実線と点線がほぼ一致している。これは軌道長半

径の進化に対して複数の原始惑星が存在していることが影響していないことを示している。先ほども記述したように内側から暴走成長、中心星落下が起こることから外側で形成された暴走成長した原始惑星は影響を及ぼすことができないのである。(c)は(b)で表している最大質量の原始惑星の質量の時間進化を表しているが、外側から微惑星や成長した原始惑星が降ってくることで成長に影響は及ぼされないことを示している。以上のようにType-I 惑星移動は微惑星円盤や複数の原始惑星の存在による影響は受けないということがわかった。

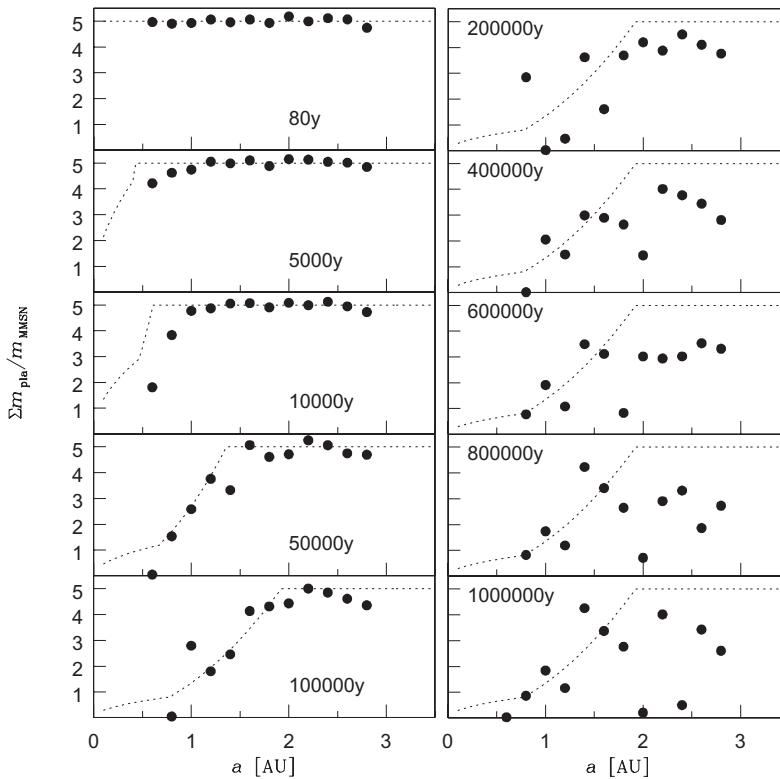


図4：典型的な固体面密度の進化。縦軸は固体面密度、横軸は軌道長半径。黒い点はN体計算結果、点線は導出した解析解である。それぞれの黒い点は計算領域を 0.2AU に区切りその中の固体物質の質量をだし、最小質量星雲モデルでの対応する質量で規格化した。

6 原始惑星の落下と固体面密度の減少

もし、乱流の効果等がないとすると、原始惑星はやはり形成されてもType-I 惑星落下は免れないことがわかる。では、それで原始惑星が全てなくなってしまうのかというそうではない。動径方向の惑星移動を考慮しない場合、原始惑星は一旦火星サイズほどの孤立質量まで成長する[2]。孤立質量まで成長すると、周囲の微惑星が枯渇する。つまり、この孤立質量のものが全て中心星に落ちてしまう時、円盤からは固体が全てなくなってしまうことになる。しかし、原始惑星は暴走成長をし、孤立質量に達する前に中心星に落下する。残った微惑星円盤からまた新たに少し小さな原始惑星が暴走成長を通じて形成される。そしてこの原始惑星も落下をする。さらにまたそこで原始惑星が成長し…という繰り返しが起きる。ガスは散逸するので形成される原始惑星の落下タイムスケールも徐々に長くなる。この繰り返しは、暴走成長をしたものの落下タイムスケールがガスの散逸タイムスケール(約 10^6 年)より長くなるまで続く。著者らはこのことを使い、解析的に固体面密度の減少を導出した。ある軌道長半径でガスの固体面密度、ダストの固体面密度、そしてガス散逸時間を仮定すると、ガス散逸後にどのくらいの固体面密度がその場所に残っているのかを計

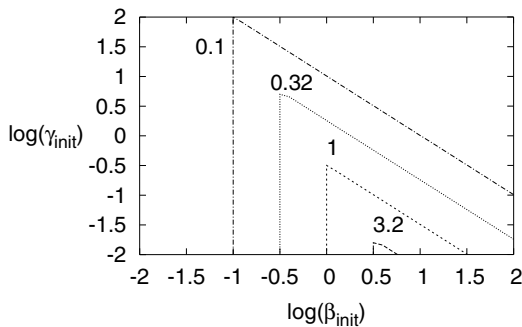


図5 : ガス散逸時間を 10^6 年とした時、1AU でどのくらいの固体面密度が残るのかを等高線で表す。初期固体面密度を横軸に、初期ガス/ダスト比を縦軸にとる。

算できる。このようにして導出した固体面密度の進化はN体計算ともあっていることをしめしているのが図4である。縦軸は固体面密度を表しており、最小質量星雲モデルで規格化してある。黒い点はN体計算結果、点線は導出した解析解である。この計算例では前述した通り、初期は最小質量の5倍の面密度から計算を始め、ガスの散逸時間は 10^5 年とした。内側から固体面密度が減少していく様子が示されている。時間が10万年になるまで点線と黒点はよくあっている。時間がガス散逸時間である 10^5 年を過ぎるとN体計算結果を表している黒点にばらつきがでてくる。これはすでに大きくなった原始惑星が相互作用をし、動いている為である。しかし、固体面密度はガスがほとんどなくなっている為にあまり減少しなくなる。つまり、解析解はガス散逸後の固体面密度を良く表していることを示している。

7 最小質量星雲モデルを残すには

著者らが導出した解析解を使い、初期の微惑星円盤のダストとガスの量、ガス散逸時間を仮定すると、ある軌道長半径でどのくらいの固体面密度がガス散逸後に残るのかということが導出できる。解析解を使い、どのような微惑星円盤からどのような固体面密度が残るのかを示したのが図5である。この図は縦軸が初期のガス/ダスト比を最小質量星雲モデルのガス/ダスト比で規格化したもの $\gamma_{init} = (\Sigma_{g,init} / \Sigma_{s,init}) / (\Sigma_{g,SN} / \Sigma_{s,SN})$

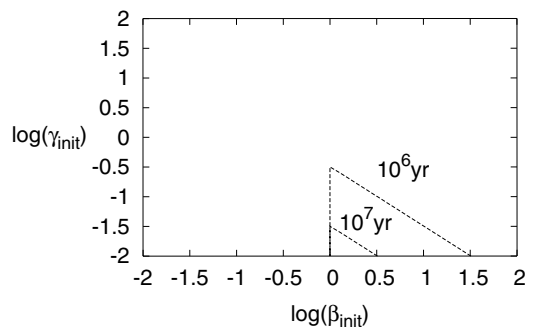


図6 : ガス散逸時間を 10^6 年とした時と 10^7 年とした時、1AU で最小質量星雲モデル分の固体面密度が残る面盤を等高線で表す。初期固体面密度を横軸に、初期ガス/ダスト比を縦軸にとる。

$\Sigma_{s,SN}$), 横軸が初期の固体面密度を最小質量星雲モデルの固体面密度で規格化したもの $\beta_{init} = \Sigma_{s,init} / \Sigma_{s,SN}$ である. 等高線を表しており, それぞれの数字は1AUにおいてガス散逸時間が 10^6 年の時, 最終的にガス散逸後に残る固体面密度を最小質量星雲モデルの固体面密度で規格化した値となっている. 右下の方向にいけばいくほど残る面密度は多くなる. しかし γ_{init} を一定にして横に見た場合, 初期固体面密度が重ければ残る固体面密度も減少することが示されている. このことは, 一概に重い円盤から重い惑星が形成されるとはいえないことを表している. また $\log \gamma_{init} = 0$, $\log \beta_{init} = 0$, つまり初期微惑星円盤が最小質量星雲モデルだと仮定すると, 1AUに最小質量モデル分の固体面密度を残すには, 初期ガス/ダスト比を0.3倍程度までおとさなければいけないことを示している. つまり, 微惑星円盤形成時には惑星形成領域ではガスに比べてダストの多い円盤を仮定しないと現在の太陽系は形成されないということになる.

8 居住可能惑星の存在

ガスの散逸時間は数百万年といわれている. 図5ではガス散逸時間を固定した. その散逸時間に幅を持たせたのが図6である. それぞれ 10^6 年としたときと 10^7 年としたときの線が示されており, その間の台形部分に含まれる β_{init} , γ_{init} のパラメータをもつ微惑星円盤では最終的に1AU付近に最小質量星雲モデル分の固体面密度が残ることが示されている.

原始惑星から地球型惑星までが形成される段階も考慮すると, 最小質量星雲モデル分の固体面密度が存在すれば, 1AU付近に $1M_{\oplus}$ 程度の質量を持つ惑星が形成されるということがわかっている. また, 太陽のような中心星を仮定した場合, 質量は地球質量程度, 場所は1AU付近に存在する惑星は水が液体として安定に存在できる居住可能惑星となることが示されている. 以上のことにより, ガス散逸後 1AU 付近に最小質量星雲モデル分の固体面密度が存在すれば居住可能惑星

が形成されるということになる. つまり, 図6の台形部分初期質量を持つ微惑星円盤から, 居住可能惑星が形成される可能性が高いことがいえる.

9 議論

以上の結果より, 惑星形成にはガス/ダスト比が小さい微惑星円盤が都合が良いということがわかった. ここではそのような微惑星円盤はあり得るということを説明する. 微惑星円盤形成当初は, 分子雲のガス/ダスト比 (つまり, 最小質量星雲モデルのガス/ダスト比) が数百 AU まで広がっていると考えられる. しかしダスト成分が徐々に成長し, ガス抵抗で内側へ落ちてくると内側のダストの量が増え, ガス/ダスト比が減る. 微惑星は成長し, ガス抵抗は段々効かなくなり, 惑星形成領域である数十AUでたまる, という論文もでている[11]. また, 落下は氷・水蒸気境界, またシリケートの蒸発する境界で固体物質がたまるということもいわれている. なので低いガス/ダスト比の微惑星円盤は実現できる可能性がある. また重力不安定で微惑星を形成するという微惑星形成説にもガス/ダスト比が小さい円盤は都合が良いという計算結果も存在する[12].

本研究では中心星へ移動した天体は中心星へ落下したと仮定している. しかし, 円盤の内縁で本当に惑星は落下するのかという問題は残っている. もし, 内縁でたまるようなことがおこれば, 固体の多い微惑星円盤を考慮すると, 中心星に近いところで巨大惑星が形成されることになる. 中心星近傍での惑星の行方は議論の余地が残っている.

10 まとめ

惑星形成シナリオの大きな問題点である惑星落下問題を正面からとりくんでみた. 惑星が動径方向に移動するType-I 惑星移動の効果を入れた N 体計算を行ない, やはりType-I 惑星移動は避けることのできない

現象である可能性が高いことを示した。しかし、惑星落下は原始惑星の成長途上で起こり、原始惑星が微惑星を全て集積し、孤立質量になってから落下するのではないこともわかった。ガスの散逸も考慮すると、解析的に円盤の固体面密度がどのように進化するのかを導出できる。その結果、初期の微惑星円盤の惑星形成領域でガス/ダスト比が分子雲の値(最小質量星雲モデルの値)の約1/10であれば惑星は生き残れることを示した。微惑星円盤の段階でその円盤で惑星形成が起こるかどうかを判断することができるかもしれない。

11 謝辞

本稿を査読して下さった渡邊誠一郎助教授には的確かつ有意義なコメントをいただきました。お礼申し上げます。

参考文献

- [1] Kokubo and Ida, 1998, *Icarus*, 131, 171
- [2] Kokubo and Ida, 2002, *Astrophys. J.*, 581, 666
- [3] Chambers and Wetherill, 1998, *Icarus*, 136, 304
- [4] Kominami and Ida, 2002, *Icarus*, 157, 43
- [5] Adachi et al., 1976, *Prog. Theor. Phys.*, 56, 1756
- [6] Ward, 1986, *Icarus*, 67, 164
- [7] Tanaka et al. 2002, *Astrophys. J.*, 565, 1257
- [8] Tanaka and Ward, 2004, *Astrophys. J.*, 602, 388
- [9] Lin and Papaloizou, 1986, *Astrophys. J.*, 309, 846
- [10] Tanaka and Ida, 1999, *Icarus*, 139, 350
- [11] Stepinski and Velageas, 1996, *A&A*, 309, 301
- [12] Ishitsu and Sekiya, 2003, *Icarus*, 165, 181