

地球重力場内での月の平衡形状

榎森 啓元¹

1. Introduction

現在までに考えられている月形成のシナリオでは、形成直後の月が極めて高温であり、熔融状態を経験していたことが十分に想定され得る。現在のところ最も有力な月形成のシナリオであると考えられる「ジャイアント・インパクト説」では、巨大衝突により月および地球の温度が数千度という高温まで上昇することが予想される。さらに、今回の研究会で紹介された田中氏の講演では、ジャイアント・インパクトの結果周地球に広がった月材料物質が互いに衝突し再集積により月を形成した場合、数カ月という極めて短い時間で月サイズの天体まで成長が進むことが報告された。これほどの短時間の月集積が起こったならば、月の集積による加熱、熔融も十分に考えられる。また月の化学的性質、特に月における高圧親鉄性元素(V, Cr, Mn)に不足が原始地球に予想されるマグマオーシャンの化学成分と良く似ていることから、月が地球のマグマオーシャンの分裂によって形成されたとする月起源説も考えられている(cf. 奥地, 高橋 [4])。もし、地球がマグマオーシャンの分裂で形成されたならば、形成直後の月はまさに熔融したシリケートの塊であったと考えることができよう。

では、月が形成直後は熔融状態にあったならば、月の形状は如何に決まったと考えるべきだろうか。

月は形成直後には地球のごく近傍、地球半径の数倍程度の軌道半径を描き運動していたと予想される。ここから月は地球との潮汐相互作用により地球との距離を延ばしながら、同時に形成直後の高温状態から温度を下げて行ったであろう。地球の周囲を熔融した状態の月が運動している場合、その形状は地球重力場内での静水圧平衡により決定されたと考えるのが自然である。やがて冷却が進み、それまで熔融状態にあった月が強度を持ち始めると、月の形状はその時の地球の重力を含めた重力場を反映した姿で、一時決定したと考えることが出来よう。その後は月は更に潮汐作用による軌道進化を続け、現在の軌道へと移動した。この潮汐軌道進化の間に月は、外形の緩和も同時に行いながら進化したと考えられる(この点に関しては今回の研究会の山路氏の講演を参照されたし)。

こうして考えると、熔融状態の月が地球重力場内で如何なる平衡形状を得るのかは、月の形状を考察する際の初期条件を与える意味で重要である。また容易に想像できるように、熔融状態の月の地球重力場内での平衡形状は、地球の重力場を含めた月周りの重力場が地球側と反地球側で非対称なために、自ずと地球側反地球側についての非対称性を持つであろう。ここでは、地球重力場内を運動する自己重力流体球が如何なる平衡形状を取るかを求め、その結果生じる地球側反地球側の形状の非対称性の度合いを確認しよう。

¹東京工業大学理学部地球惑星科学科

2. 衛星の平衡形状 ロッシュ問題とその拡張

惑星周囲を運動する衛星は如何なる平衡形状を取るか、「ロッシュ問題」として一般に良く知られているこの問題に対する研究は19世紀に M. E. D. Roche によって行われた(ロッシュ問題とその幾つかの拡張問題に関しては Chandrasekhar[2] に詳しい説明がある). ここではまずロッシュ問題で用いられた手法を紹介し, ロッシュ問題では扱われていない月の中心と重心のズレを考察するために必要な拡張を行う.

ロッシュと同様にここでは以下の仮定を置く.

- (1) 地球は質量 M の球であり, 変形しない.
- (2) 月は質量 m の流体であり, 密度は一様な ρ であるとする.
- (3) 月の重心は地球周りを半径 A の円軌道を描いて公転運動している.
- (4) 月は公転周期と同期したスピンをも持つ. 公転と自転の角速度を Ω とする. また, 月の重心はこのスピンの軸上に乗っている.

月が地球の近傍にある時, 地球の潮汐作用により月の軌道離心率は軌道長半径の進化よりも十分に短い時間で減少することが知られている. よって仮定(3)は妥当であろう. また, Gladman et al.[3]によれば潮汐進化する衛星のスピンの公転周期へのロックは, これも軌道長半径の潮汐進化の時間に比べると短い時間で行われる. よってここでは, 月の冷却固化によって月内部で粘性による抵抗が働き始めると速やかに自転周期は公転周期に一致すると仮定した. 月の密度を一様とした仮定の(2)は, 地球重力場内での静水圧平衡形状において重心と形の中心にどの程度のズレが生じるかを見るためにおいた, 簡単化のための仮定である. 地殻の厚さの違いといった, 密度の違う物質の非一様分布

分布を全く考慮しなくても, 単に地球重力場内での平衡形状を考えるだけで月の重心と形の重心がズレを持ち得ることをまず確認し, それがどの程度のズレかを見てみよう.

仮定(3)および(4)により, 原点を月の重心に置き, 公転に同期したスピンを持つ月に固定した座標系を図1に示す様にとると, 月を構成する流体はこの座標系に対して静止し, その構造は静水圧方程式により与えることができる. この座標系では月のスピンに平行な軸を x_3 , 地球を向いた方向を x_1 この2つに直交する方向を x_2 とする. 月内部の流体の

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \Phi + \Phi_M + \frac{1}{2} \Omega^2 [(x_1 - \frac{M}{M+m} A)^2 + x_2^2] \right\} = 0 \quad (1)$$

ここで, 圧力勾配と釣り合っている有効重力ポテンシャルは3つの部分から構成されている. Φ は月の自己重力, Φ_M は地球の重力ポテンシャルそして最後の Ω^2 の項はスピンと軌道公転運動から発生する遠心力ポテンシャルである. 即ち

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = GM \frac{1}{\sqrt{(A-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad (2)$$

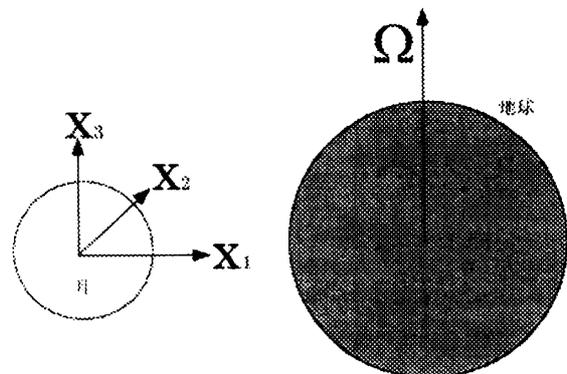


図1. 座標系の説明. 月(図の左側の流体球)の重心に原点を置く直交座標系 x_1, x_2, x_3 を考える. x_1 方向は月の重心から見た地球(図の右の球)の方向である. Ω は月の公転角速度および月の自転角速度を表すベクトルであり, 座標の x_3 方向は此の Ω 方向に一致する.

$$\Phi(\mathbf{x}) = G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d\mathbf{r}^3 \quad (3)$$

また月のスピン及び公転の角速度 Ω は

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{A^3} \frac{1}{\mu}} \quad (4)$$

となる, ただし μ は月と地球の質量比を表し,

$$\mu = \frac{M}{M+m} \quad (5)$$

と定義する.

ここで月の半径が地球と月の距離に比較して短いことを利用して, 地球の重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの和を以下のように展開する.

$$\begin{aligned} \Phi_M + \frac{1}{2}\Omega^2[(x_1 - \mu A)^2 + x_2^2] \\ \simeq \Omega^2[\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \mu(\frac{3}{2}x_1^2 \\ - \frac{1}{2}x_k^2 + \frac{5}{2}\frac{x_1^3}{A} - \frac{3}{2}\frac{x_1x_k^2}{A})] \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)ではポテンシャルを座標の3次のオーダーまで展開している. 重心と形の中心のズレはこの3次の展開部分から作りだされる. ロッシュ問題では式(6)に対応するポテンシャルの展開は2次までであり, この点がここで紹介する平衡形状の計算方法におけるロッシュ問題からの拡張の一つである. こうして展開したポテンシャルを式(1)に代入し, 得られる基礎方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \rho \Omega^2 \{x_1 \delta_{1i} - x_3 \delta_{3i} \\ + \mu \{3x_1 \delta_{1i} - x_1 \delta_{1i} + \frac{3}{2A}(5x_1^2 \delta_{1i} \\ - \delta_{1i} x_1^2 - 2x_1 x_1 \delta_{1i})\}\} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

である. ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号を表す.

得られた基礎方程式を直接積分して自己重力流

体の平衡形状を求めることは大変困難である. そこで, ロッシュ問題においても用いられている, モーメント方程式をここでも導入しよう. 式(7)の両辺に座標 x_i または座標の2次式 x_i, x_k を乗じて流体の全体積に渡って体積積分を行う. この際, 積分を行うには, 流体の形状を仮定する必要がある. この点については後で説明を行う. 座標の1次式を乗じて積分した結果得られる1次モーメント方程式は

$$\begin{aligned} \Pi \delta_{ij} + \Phi_{ij} + \Omega^2 [I_{ij} - I_{3j} \delta_{i3} \\ + \mu \{3I_{1j} \delta_{i1} - I_{ij} + \frac{3}{2A}(5I_{11j} \delta_{1i} \\ - I_{ij} \delta_{1i} - 2I_{1ij})\}] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

であり, 同様に2次モーメント方程式も

$$\begin{aligned} \Pi_k \delta_{ij} + \Pi_j \delta_{ik} + \Phi_{ijk} + \Omega^2 [I_{ijk} - \delta_{i3} I_{3jk} \\ + \mu \{3\delta_{i1} I_{1jk} - I_{ijk} + \frac{3}{2A}(5\delta_{i1} I_{11jk} - \delta_{i1} I_{ijk} \\ - 2I_{1ijk})\}] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

となる. ここでモーメント方程式に現れる各テンソルの定義を示す.

$$\begin{aligned} \Pi &= - \int_V p dV & \Pi_i &= \int_V \rho x_i dV \\ \Phi_{ij} &= \int_V \rho x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dV & \Phi_{ijk} &= \int_V \rho x_j x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dV \\ I_{ij} &= \int_V \rho x_i x_j dV & I_{ijk} &= \int_V \rho x_i x_j x_k dV \\ I_{ijkl} &= \int_V \rho x_i x_j x_k x_l dV \end{aligned} \quad (10)$$

以下では Π と Π_i を圧力テンソル, Φ_{ij} と Φ_{ijk} を重力ポテンシャルテンソル, さらに, I_{ij} , I_{ijk} そして I_{ijkl} を慣性モーメントテンソルと呼ぶ. これらのモーメント方程式に加えて, 流体の形状の如何に問わず, 流体の重心の位置はここで選んでいる座標系の原点に一致するという条件を課す.

$$\int_V \rho x_i dV = 0 \quad (11)$$

ここで示した各テンソルを求めるためには、積分の範囲である自己重力流体の形状が必要である。ロッシュ問題では流体の平衡形状として3軸不等楕円体を仮定し、上記の各テンソルを計算し楕円体の3軸の長さの比を求めている。しかし、この方法では形の中心と重心のズレを表すことが出来ないで、ここでは流体の形状を球面調和関数を用いて展開し、3軸不等楕円体の形状と形の中心の重心からのズレを同時に表す。

図1に示した座標系に代わって、新たに極座標 θ 、 ψ を導入する。ここで新しい座標を

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \\ \cos \psi &= \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}} \quad \sin \psi = \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}\end{aligned}\quad (12)$$

と定義する。系の対称性から流体の平衡形状は x_1 - x_2 面と x_1 - x_3 面について対称であると考えられる。よって形状は ψ について π を周期とする $\cos(2\psi)$ の形で依存する。重心から流体表面までの距離を $R(\theta, \psi)$ として、 R を球面調和展開により

$$\begin{aligned}R(\theta, \psi) &= R_0[1 + \alpha P_1(\cos \theta) \\ &\quad + \beta P_2(\cos \theta) + \xi P_2^2(\cos \theta) \cos(2\psi) \\ &\quad + \epsilon P_3(\cos \theta) + \zeta P_3^2(\cos \theta) \cos(2\psi)]\end{aligned}\quad (13)$$

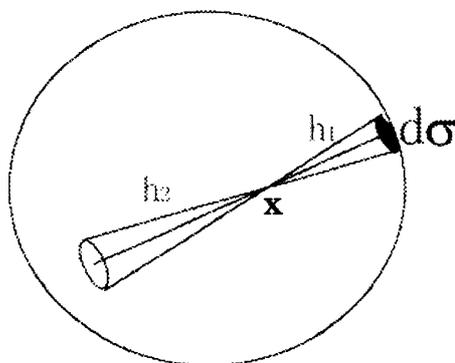


図2. 月内部重力ポテンシャルを求めるため円錐。月内部の点 x を通り頂点の立体角が $d\sigma$ であり、それぞれ両側の境界までのびる2本の円錐を考える。 h_1 と h_2 はそれぞれの円錐の高さを表す。

と表すこととする。ここで R_0 は流体球の平均半径であり、 α から ζ までの変数は形状の球からのズレを表す。ただしこのズレを表す α から ζ までの未知数は微小量であるとする。また、 P_n はルジャンドル関数、 P_n^m はルジャンドル陪関数である。

式(3)および(10)における体積積分は、 $r < R(\theta, \psi)$ 、 $0 < \theta < \pi$ そして $0 < \psi < 2\pi$ の範囲で体積積分することによって、未知数 α から ζ の関数として与えられる。ただし、これらの未知数はそれぞれが1より小さい微小量であるので各モーメントの計算では各々の1次までの精度で求めることとする。

まず、式(3)で導入された自己重力ポテンシャルを求める。図2に示すように、流体球内部の点 x を頂点として、流体球の境界まで延びる2本の円錐を考える。微小立体角 $d\sigma = \sin\theta d\theta d\psi$ を頂角とする2本の円錐の底面から頂点までの高さを h_1 と h_2 とすると、この2本の円錐の中に入っている流体が点 x につくる重力ポテンシャルは

$$d\Phi = \frac{1}{2} G\rho(h_1^2 + h_2^2) \sin\theta d\theta d\psi \quad (14)$$

と与えられる。物体の形状が式(13)で与えられるので、 h_1 と h_2 を微小量 α から ζ の一次式で表し、式(14)を立体角 $d\sigma$ に関して積分すると、物体内部での自己重力ポテンシャルを得る。ただし、 h_1 と h_2 の具体的な表式は大変煩雑なので、ここでは最終的に得られるポテンシャルのみ示し、 h_1 と h_2 の表式はAppendixに示すこととする。

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\pi G\rho\left\{R_0^2 - \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right\} \\ &\quad + \frac{2}{3}\alpha R_0 x_1 + \frac{1}{5}\beta(2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \\ &\quad + \frac{6}{5}\xi(x_2^2 - x_3^2) + \frac{x_1}{7R_0}\{\epsilon(2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2) \\ &\quad + 30\zeta(x_2^2 - x_3^2)\}\end{aligned}\quad (15)$$

この重力ポテンシャルを式(10)に代入し、重力ポテンシャルテンソルを求める。式(10)で定義され

た重力ポテンシャルテンソルと慣性モーメントテンソルの具体的な値はまとめてAppendixに示す。

ただしここで、後で具体的に示すが、式(8)や(9)で慣性モーメントテンソルの項に現れる Ω^2 が、重力モーメントテンソルに現れる $\pi G\rho$ に比較して微小であることに注意してもらいたい。以下では微小量の一次の精度での議論を行うので、式(8)や(9)で微小量 Ω^2 が掛かる慣性モーメントテンソルについては、 α や β といった形状の歪みを表す微小量を含まない、ゼロ次精度の値を求めれば十分であることが分かる。

これらの各テンソルを見ると明かなように、これらテンソルからなる式(8)と(9)は流体の形状を表す α から ξ までの変数に関する一次の代数方程式になっている。これより我々は流体の平衡形状を容易に求めることが可能となる。

3. 月の平衡形状

流体の平衡形状を与えるモーメント方程式と各テンソルを得たので、具体的な平衡形状を求めよう。まず流体の形状を式(13)で与えた場合の重心の位置と形の中心の位置を求める。

まず式(11)で与えられている条件について考える。流体の形状の x_1 - x_2 面および x_1 - x_3 面についての対称性から明かなように重心の x_2 および x_3 座標はゼロである。重心の x_1 座標を求めると式(11)の条件より

$$\frac{\int_V \rho r \cos \theta r^2 dr \sin \theta d\theta d\psi}{\int_V \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\psi} = \alpha R_0 = 0 \quad (16)$$

を得る。よって $\alpha=0$ である。

つぎに今注目している形の中心を求めよう。重心の場合と同じく、形の中心も x_1 方向にのみズレを持つことは明かである。ここでは形の中心の x_1 座

標を f_1 として、それを地球側の縁と反地球側の縁の中央の位置として定義する。すなわち、

$$f_1 = \frac{1}{2}[R(\theta=0) - R(\theta=\pi)] = \epsilon R_0 \quad (17)$$

となる。ただし先にもとめた結果 $\alpha=0$ を用いた。結局、注目する重心と形の中心のズレは ϵR_0 に等しい。

では、モーメント方程式から形状を決定しよう。まず1次モーメント方程式(8)より以下の方程式

$$\begin{aligned} \Pi + \Phi_{11} + \Omega^2(1+2\mu)I_{11} &= 0 \\ \Pi + \Phi_{22} + \Omega^2(1-\mu)I_{22} &= 0 \\ \Pi + \Phi_{33} - \Omega^2(\mu)I_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

を得る。ここで、先に述べた様に慣性モーメントに関してはゼロ次精度の値を用いるので、3次慣性モーメントテンソルはゼロである。ここにAppendixで示した各テンソルの値を代入し、 Π を消去すると、結果として以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{5}{16}(1+6\mu)\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} \\ \xi &= \frac{5}{32}\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} \end{aligned} \quad (19)$$

同様に2次モーメントの方程式の各成分を書き下す。4階の慣性モーメントテンソルの線形結合で表されるテンソル U_{ijk} を、あらかじめ

$$U_{ijk} = \frac{3}{2A}\Omega^2\mu[5\delta_{i1}I_{11jk} - \delta_{i1}I_{ijk} - 2I_{1ijk}] \quad (20)$$

と定義しておく。この U_{ijk} を用いると、2次モーメントの方程式からは以下の式を得る。

$$\begin{aligned} 2\Pi_1 + \Phi_{111} + U_{111} &= 0 \\ \Pi_1 + \Phi_{212} + U_{212} &= 0 \\ \Pi_1 + \Phi_{313} + U_{313} &= 0 \\ \Phi_{122} + U_{122} &= 0 \\ \Phi_{133} + U_{133} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

1次モーメントの方程式と同様に、3次の慣性モー

メントテンソルはゼロとしている。1次モーメントの方程式と同じく、この式(21)に各テンソルの式を代入すると、形状を決定する変数 ϵ, ζ を求めることができる。結果は

$$\epsilon = \frac{21}{16} \mu \frac{\Omega^2 R_0}{\pi G \rho A} \quad \zeta = 0 \quad (22)$$

となる。

以上で地球重力場内での流体の平衡形状を決定するすべての変数が得られた。ここまでの結果をまとめよう。結果が分かり易いように、

$$\mu \frac{\Omega^2}{\pi G \rho} = \frac{4}{3} \frac{\rho_E}{\rho} \left(\frac{R_E}{A} \right)^3 \quad (23)$$

なる関係を用いる。ここで R_E は地球の半径、 A は流体球から地球までの距離である、また地球の平均密度を ρ_E とした。

この論文では、重心と形の中心のズレを扱うために、式(13)のように球面調和関数を導入して流体球の平衡形状を表した。一方、衛星の形状を問題としたロッシュの方法では、流体球の平衡形状は3軸不等の楕円体として近似されている。この論文で導入した球面調和関数による展開の係数 β と ξ は、歪みが小さい範囲では、この3軸不等楕円体の歪みに対応する。流体の形状を3軸不等楕円体で近似した場合、最も長い軸は地球方向の x_1 軸であり、最も短いのはスピンの軸である x_3 軸である。 x_2 方向の軸の長さはこの2者の中間にくる。いま x_1 方向の流体球の半径を R_1 、 x_2 方向を R_2 、そして x_3 方向を R_3 とすると、それぞれの半径の比は β と ξ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} &= 1 - \frac{1}{2}(3\beta + 6\xi) \\ &= 1 - \frac{5}{4} \frac{\rho_E}{\rho} \frac{1+3\mu}{\mu} \left(\frac{R_E}{A} \right)^3 \\ \frac{R_3}{R_1} &= 1 - \frac{1}{2}(3\beta - 6\xi) \\ &= 1 - \frac{15}{4} \frac{\rho_E}{\rho} \left(\frac{R_E}{A} \right)^3 \end{aligned} \quad (24)$$

と表される。一方、式(22)と(17)より、流体球の形の中心は重心の位置に対して地球側にずれていて、そのズレの大きさと流体球の平均半径の比は

$$\frac{f_1}{R_0} = \frac{7}{8} \frac{\rho_E}{\rho} \frac{R_0}{A} \left(\frac{R_E}{A} \right)^3 \quad (25)$$

と表される。

以上の結果から分かるように、地球の周囲を運動する流体球の平衡形状においては、例えばその流体球が一様な密度を持つ場合でも、地球重力場の非対称性によって自然と重心と形の中心にズレが生じる。仮に月が形成直後に熔融状態にあったならば、その平衡形状はここまでで述べた3軸不等楕円体と形の中心のズレの重ね合わせで表される形状であったものと考えられる。

4. 現在の月の形状との比較

ここまでの内容により、地球周囲の軌道を運動する流体球の平衡形状が如何なる方法で推定されるかが理解できたものと思う。特にここでは、その平衡形状が地球重力場の非対称性を反映した形で自然と重心と形の中心のズレを生じることに注目し、一様密度の流体球という仮定の下で計算を行った。結果として確かに流体球の形状は、単なる3軸不等楕円体ではなく、式(25)で示される形の中心のズレを持つことが分かった。しかし、式(25)を見ると確かに重心と形の中心のズレは存在するが、現在の月におけるこのズレを説明するには不十分であることも分かる。

月の重心と“形の中心”がズレていることは月の特徴の一つとして良く知られ、月の重力場から求められる重心の位置と、月面高度の観測により、月の重心よりも約2km反地球側に片寄った位置に形の中心が存在することが報告されている(Bills and Ferrari[1])。一方、月を3軸不等の楕円体と近似し

た場合の3軸の長さは、 R_1 すなわち地球方向が1738.4km、 R_2 すなわち自転軸方向が1736.7kmであり、こちらも約2kmの違いがある。これらの値をを式(24)に代入すると、現在の3軸不等楕円体としての月の形状は、月と地球の距離が地球半径の約17~19倍の位置での、月の平衡形状とほぼ一致することが分かる。

これに対して式(24)と(25)は形の中心の重心からのズレの度合いは楕円体としての扁平の度合いよりも常に、月半径と月の軌道長半径の比という微量分だけ、小さいことを示している。地球の平均密度と月の平均密度の比を $\rho_E/\rho_M=1.6$ 、地球半径と月の半径の比を $R_M/R_E=0.27$ 、さらに現在の形の中心と重心のズレ $f_1=2$ kmを式(25)に代入してみる。この結果、現在の形の中心のズレを地球重力場内での平衡形状の結果として作り出すには、地球半径の約4倍の位置で月の形状を決定する必要がある。この結果と先に示した楕円体形状から得られた、約18倍の地球半径という値は大きく食い違う。また、式(25)では形の中心は地球側にズレているが、現在の月ではこれが反地球側にズレていることも、大きな違いである。このことは、地球重力場内での平衡形状の非対称性から生み出される形の中心と重心のズレは、現在の月で観測されるものより著しく小さく、直接的に現在の月の形状を説明するものでは無いことを示している。

Bills and Ferrari[1]は、月においてアイソスタシーが成立していると仮定し、衛星の運動から得た月の重力場のデータ、月の地形の高度分布、月震のデータから得た月の内部構造に関する推定より、地球側の地殻の厚さは約60km、反地球側では約100kmであると結論した。この地殻の厚さの非対称性が先に述べた月における形の中心のズレを作っているとする考えが現在のところ最も広く受け入れられている。しかし、この地殻の厚さの非対称性を生む原因については、月への隕石の落下頻

度に地球側反地球側の非対称性があり、頻繁に隕石の落下があった地球側の地殻が削られて薄くなったとする説(Wood [6])や、地殻を形成した月のマンツルの化学組成に地球側反地球側の非対称性が存在すると考える説(Wasson and Warren [5])など、未だに議論が残っている状態である。

ここで示した地球重力場の非対称性は、月が形成直後ほぼ全域にわたり熔融状態にあり、その形状が非対称な重力場内での平衡形状として決定したならば、物質分布の非対称性を生み出す原因となり得る。今回は、一様密度の流体球の平衡形状を扱ったが、今後はマンツルと地殻と言った密度成層構造を考慮した平衡形状の計算を行い、地殻の厚さの非対称性を考えることが重要であろう。

参考文献

- [1] Bills, B. G. and Ferrari, A. J., 1977: A lunar density model consistent with topographic, gravitational, librational, and seismic data. *J. Geophys. Res.* **82**, 1306-1314.
- [2] Chandrasekhar, S., 1969: *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Dover Publications, Inc., New York
- [3] Gladman B., Quinn D. D., Ncholson, P., and Rand R., 1996: *Icarus* **122**, 166-192
- [4] 奥地拓生, 高橋栄一, 1994: 地球化学的月起源論, 天文月報 **87**, 245-252.
- [5] Wasson W. J. and Warren P.H., 1980: Contribution of the Mantle to the Asymmetry. *Icarus* **44**, 752-771.
- [6] Wood, J. A., 1973: Bombardment as a cause of the lunar asymmetry. *The Moon* **8**, 73-103.

Appendix

以下に本文中の式(10)で定義された各テンソルの具体的な値および、式(14)で導入した $h_1^2+h_2^2$ の表式をまとめる。

重力モーメントテンソルに関しては、それぞれのテンソルの成分のなかで、ゼロでない成分のみを列挙する。よって、各テンソルの成分でここに書かれていないものはゼロである。

2階重力ポテンシャルテンソル

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= \frac{16}{45}G\pi^2\rho^2R_0^5(-1 - \frac{4}{5}\beta) \\ \Phi_{22} &= \frac{16}{45}G\pi^2\rho^2R_0^5(-1 + \frac{2}{5}\beta - \frac{12}{5}\xi) \\ \Phi_{33} &= \frac{16}{45}G\pi^2\rho^2R_0^5(-1 + \frac{2}{5}\beta + \frac{12}{5}\xi)\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

3階重力ポテンシャルテンソル

$$\begin{aligned}\Phi_{111} &= \frac{128}{735}G\pi^2\rho^2R_0^6\epsilon \\ \Phi_{122} &= \Phi_{212} = \frac{64}{147}G\pi^2\rho^2R_0^6(\frac{1}{5}\epsilon - 2\zeta) \\ \Phi_{133} &= \Phi_{313} = \frac{64}{147}G\pi^2\rho^2R_0^6(\frac{1}{5}\epsilon + 2\zeta)\end{aligned}\quad (\text{A2})$$

慣性モーメントテンソルに関しては、本文中でも述べたように、微小量のゼロ次の式を示す。

$$\begin{aligned}I_{ij} &= \frac{4}{15}\pi\rho R_0^5\delta_{ij} \\ I_{ijk} &= 0 \\ I_{ijkm} &= \frac{4}{105}\pi\rho R_0^7(\delta_{ij}\delta_{km} + \delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})\end{aligned}\quad (\text{A3})$$

最後に物体内部の重力ポテンシャルを求める際に式(14)において導入した、 $h_1^2+h_2^2$ の具体的な表式を示す。

$$h_1^2+h_2^2 = F + \alpha H + \beta J + \xi K + \epsilon M + \zeta N \quad (\text{A4})$$

ただし、 H 等は以下で定義される座標と方位角の関数である。

$$\begin{aligned}A &= x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) \cos(\psi) + x_3 \sin(\theta) \sin(\psi) \\ B &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ F &= 2(2A^2 - B + R_0^2) \\ H &= 4[x_1 - 2A \cos(\theta)]R_0 \\ J &= 2[(3x_1^2 - R_0^2) - 12Ax_1 \cos(\theta) + 3 \cos^2(\theta)(4A^2 - B + R_0^2)] \\ K &= 12[(x_2^2 - x_3^2) - 2A(x_2 \sin(\theta) \cos(\psi) + x_3 \sin(\theta) \sin(\psi)) + R_0^2 \sin^2(\theta) \cos(\psi) \sin(\psi)] \\ M &= 2[x_1(5x_1^2 - 3R_0^2) - 30x_1^2 \cos(\theta)A + 15x_1 \cos^2(\theta)(4A^2 - B + R_0^2) - 20A \cos^3(\theta)(2A^2 - B + R_0^2)]/R_0 \\ N &= 60[x_1(x_2^2 - x_3^2) - 2A(2x_1(x_2 \sin(\theta) \cos(\psi) - x_3 \sin(\theta) \sin(\psi)) + (x_2^2 - x_3^2) \cos(\theta)) \\ &\quad + (4A^2 - B + R_0^2)(x_1 \sin^2(\theta)(\cos^2(\psi) - \sin^2(\psi)) + 2(x_2 \sin(\theta) \cos(\psi) - x_3 \sin(\theta) \sin(\psi)) \cos(\theta)) \\ &\quad - 4A \cos(\theta) \sin^2(\theta)(\cos^2(\psi) - \sin^2(\psi))(2A^2 - B + R_0^2)]/R_0\end{aligned}\quad (\text{A5})$$